

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Título: Matemática e Música

Disciplina: Trabalho de Graduação A e B

Responsável: Prof. Dr. Artur Darezzo Filho

Aluna: Juliana Pimentel Juliani

Orientador: Prof. Dr. Pedro Luiz A. Malagutti

São Carlos

Dezembro de 2003

“Matemática e Música”

Juliana Pimentel Juliani

Orientador: Prof. Dr. Pedro Luiz A. Malagutti

Trabalho de Graduação A e B

Prof. Responsável: Prof. Dr. Artur Darezzo Filho

São Carlos

Dezembro de 2003

RESUMO

Neste trabalho serão abordadas as várias relações existentes entre a matemática e a música desde níveis fundamentais como razões entre comprimentos de cordas e entre frequências das notas, relações entre comprimentos de cordas e médias, as frequências relacionadas as exponenciais e aos logaritmos, funções inversas entre comprimentos e frequências, o som como ondas e comportamento logarítmico dos trastes, além disso, a partir de conhecimentos físicos, estudaremos o comportamento de uma onda por meio da modelagem de um problema específico em uma corda elástica, resultando em séries de senos ou co-senos, conhecidas como séries de Fourier e as ondas sob duas dimensões – membrana elástica (bumbo) -, o qual nos leva aos problemas de Sturm-Liouville e equações de Bessel. Podemos perceber que os elementos que unem a matemática à música são muitos apesar de dispersos. Seriam vários os experimentos que poderiam uni-los, se estes não viessem a contrariar o princípio de materiais baratos para poderem ser usados principalmente nas escolas da rede públicas de ensino. Refiro-me a matérias como osciloscópio, freqüencímetro e conjunto de diapasões, os quais não são encontrados na maioria das escolas. De qualquer maneira, com o material mencionado neste trabalho, já é possível fazer uma belíssima introdução ao estudo destas áreas.

SUMÁRIO

Introdução	5
Capítulo 1: Uma Introdução as Origens das Relações entre a Matemática e a Música	8
Capítulo 2: Entendendo um pouco sobre Teoria Musical	11
Capítulo 3: As Razões na Música	13
Capítulo 4: A Frequência sob um Novo Ângulo	18
Capítulo 5: As Ondas na Música	22
Capítulo 6: Os Logarítmos no Dimensionamento de Trastes	29
Capítulo 7: Analisando os Logarítmos nos Instrumentos Musicais	33
Capítulo 8: O Nautilus e as Frequências Musicais	36
Capítulo 9: A Descoberta dos Gregos	38
Capítulo 10: Analisando o Som em uma Corda Elástica	40
10. 1. Dedução da Equação Da Onda	40
10. 2. As Séries de Fourier	44
10. 2. 1. Propriedades das Funções Seno e Co-Seno.....	44
10. 2. 2. Funções Pares e Ímpares.....	46
10. 2. 3. As Fórmulas de Euler Fourier.....	47
10.3. Teorema de Fourier	49
10.4. Um Problema Particular	51
10.5. Corda Elástica com Deslocamento Inicial Não Nulo	53
10.6. Justificativa da Solução	57
10.7. Problema Geral da Corda Elástica	59
Capítulo 11: Analisando o Som em uma Membrana Elástica	61
11.1 – Equações de Bessel de Ordem Zero	61
11.2 – Problemas de Valor de Contorno Homogêneos e Lineares: Autovalores e Autofunções	64
11.3 – Problemas de Valor de Contorno de Sturm-Liouville	66
11.4 - Problemas de Sturm-Liouville Singulares	70
11.5: Vibrações de uma Membrana Elástica	77
Conclusões:	81
Bibliografia	82

INTRODUÇÃO

Nem todo mundo toca um instrumento, mas todos gostam de música. Mesmo quem não toca, sabe que a seqüência das notas musicais é dó, ré, mi, fã, sol, lá, si. É praticamente a partir destas sete notas fundamentais, e mais cinco auxiliares (os bemóis e sustenidos) que as melodias da música ocidental são compostas.

Sabe-se que a música já estava presente desde as primeiras civilizações mas as notas diferiam de um instrumento para o outro pois não existiam regras para produzi-los. Foi então, segundo conta a lenda, que Pitágoras, ao passar em frente a uma oficina de ferreiro percebeu que as batidas dos martelos, os quais diferiam por suas massas, eram agradáveis ao ouvido e se combinavam muito bem.



Figura (1): a lenda dos martelos



Figura(2): Pitágoras

Para pesquisar estes sons, construiu um instrumento, mais tarde chamado monocórdio (*mono* = um e *córdio* = corda), o qual se assemelha a um violão de uma corda e trabalhando com frações desta, descobriu relações muito interessantes entre uma nota e outra. Apesar de não estarmos certos sobre sua existência, o resultado que se segue também foi atribuído à Pitágoras.

Ele provou que ao dividir a vibração bem no meio da corda, a tonalidade do som era a mesma da produzida com a corda solta, mas uma oitava acima, ou seja, com o som mais agudo. Ao fazer as outras divisões, descobriu que as principais consonâncias, as combinações de sons mais agradáveis, eram as oitavas, as quartas e as quintas, as quais correspondem às divisões exatas de uma corda esticada entre dois suportes fixos e são à base da harmonia para instrumentos de cordas. Ele

associou números inteiros ao comprimento da corda; com a corda solta associada ao número 1, a metade da corda equivalente a 1/2 e assim por diante.

A partir desta experiência, as relações entre matemática e música ficaram muito mais próximas; passou a ser uma forma de descrever a natureza e de desenvolvimento da ciência.

O primeiro algoritmo que apareceu baseava-se no alfabeto: as sete primeiras letras representavam os sete sons da escala, começando pela nota lá. Depois, criaram-se os *neumas*, sinais oriundos dos acentos grave, agudo, circunflexo, e do ponto. Porém, a notação *neumática* tinha o defeito de não indicar a altura nem a duração dos sons. Melhor que ela, era o método do monge Guido d'Arezzo (995-1050), que adotou uma pauta de quatro linhas e definiu as claves de fá e dó para registrar a altura dos sons. Além disso, Guido d'Arezzo deu nome às notas, tirando as sílabas iniciais de um hino a São João Batista; o qual era aplicado no canto eclesiástico:

<u>HINO DE SÃO JOÃO BATISTA</u>	
Ut queant laxis	Para que possam
RE sonare fibris	ressoar as maravilhas
MI ra gestorum	de teus feitos
FA muli tuorum	com largos cantos
SOL ve polluti	apaga os erros
LAB ii reatum	dos lábios manchados
Sancte Ioannes.	Ó São João.

C = dó *D = ré* **E = mi** *F = fá* **G = sol** *A = lá* **B = si**

Figura (3): algoritmo de Guido d'Arezzo

As claves, mencionadas acima, são sinais colocados no início da pauta e servem para dar nomes às notas. No exemplo abaixo, temos a clave de sol algumas notas musicais, as quais estão ou contidas entre duas linhas (F, A e C) ou cortando-as (E, G e B). Além destas, é possível reparar que existem notas abaixo das mencionadas e espaços acima do último C, isto acontece devido ao fato de podermos tocar notas tanto acima quanto abaixo das relacionadas na figura. Estas podem ser

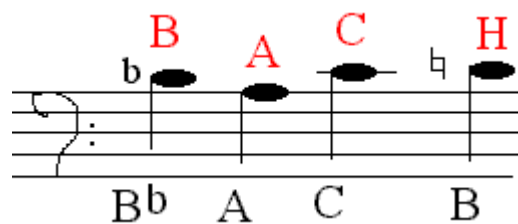
facilmente representadas nas pautas ou próximas a eles, basta apenas seguirmos certas regras de posicionamento e “tempo”, as quais não serão explicitadas em maiores detalhes neste trabalho.



Figura (4): Clave de Sol e a escala central de C no piano: C, D, E, F, G, A, B, C.

Para determinarmos as notas na clave de Fá basta contarmos duas notas acima da qual esta representa na clave de sol. Por exemplo, se a clave anterior fosse de Fá, as notas representadas seriam respectivamente: E, F, G, A, B, C, D, E; duas oitavas abaixo.

Na figura abaixo representamos um pequeno trecho, na clave de Fá, da última página da “Arte da Fuga” de Bach, nele podemos perceber o nome dele inserido no meio da música. Podemos estar nos perguntando como isto pode acontecer se as notas vão de dó a si e não temos nenhuma nota representada por H. O que acontece é que na Alemanha, terra do próprio Bach, a nota si é representada por H e a nota si^b é que é representada por B.



Figura(5): Trecho da fuga de Bach

Com relação ao que foi falado, sobre o posicionamento das notas, temos que em um piano, por exemplo, a nota C representada na parte inferior da figura (4) – clave de sol – e a nota C representada na parte superior da figura (5) – clave de Fá – representam exatamente a mesma tecla.

CAPÍTULO 1: UMA INTRODUÇÃO ÀS ORIGENS DAS RELAÇÕES ENTRE A MATEMÁTICA E A MÚSICA

Neste capítulo, faremos um apanhado geral sobre as relações existente entre a matemática e a música no mundo ocidental desde a Grécia Antiga.

Provavelmente o início da manifestação perde-se ao longo da história uma vez que em quase todos os povos da antiguidade era possível encontrar manifestações destas áreas em separado. Por exemplo, na mitologia Grega, encontramos Orfeu, cujo canto acompanhado da Lira sustava rios, amansava feras e levantava pedras. A matemática também estava presente desde os tempos mais remotos, por exemplo, na contagem de objetos. Já a manifestação destas simultaneamente ocorre a partir da necessidade de equacionar e solucionar o problema da *consonância*¹ no sentido de buscar fundamentos científicos capazes de justificar tal conceito.

No que diz respeito à organização das escalas musicais, esta ocorreu de diversas maneiras, em diferentes povos e épocas, porém com alguns aspectos em comum. Os gregos desenvolveram os tetracordes e depois a escala com sete tons. Alguns teóricos musicais como Pitágoras², Arquitas, Aristoxeno, Eratóstenes dedicaram-se à construção de escalas desenvolvendo critérios diferentes de afinidade. Por exemplo, Pitágoras estabeleceu uma afinação utilizando percursos de quinta para a obtenção das notas da escala valorizando os intervalos de quinta perfeitas³ além da utilização somente dos números de 1 a 4 na obtenção das frações da corda para gerar as notas da escala. Arquitas construiu sua escala baseada em frações da corda resultantes de médias harmônicas e aritméticas daquelas encontradas por Pitágoras no experimento do monocórdio. Já Eratóstenes elaborou a diferenciação entre intervalos calculados aritmeticamente à maneira de Aristoxeno, de intervalos calculados pela razão. (Abdounur, 2002; Weber, 1995).

Na China, os povos orientais desenvolveram, a desde a Antiguidade, as seqüências *pentatônicas* contendo, por exemplo, a partir da nota dó, o ré, o mi, o

¹ Consonância é a reunião de sons harmônicos.

² Consideramos aqui Pitágoras em lugar de um pitagóricos apesar de não termos a certeza de sua existência.

³ Quinta perfeitos é o intervalo produzido pela fração da corda correspondente a 2/3.

sol e o lá correspondendo as cinco primeiras notas do ciclo das quintas, comparadas aos cinco elementos da filosofia natural: água, fogo, madeira, metal e terra.

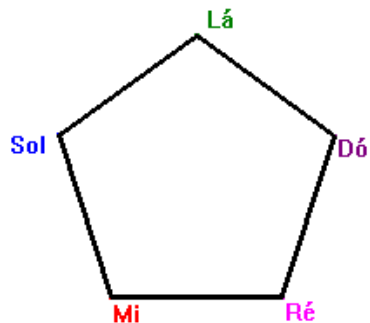


Figura (1.1): Escala pentatônica chinesa

Já os árabes elaboraram escalas contendo 17 notas musicais e os hindus com 22 (Abdounur, 2002 ; Helmholtz, 1954).

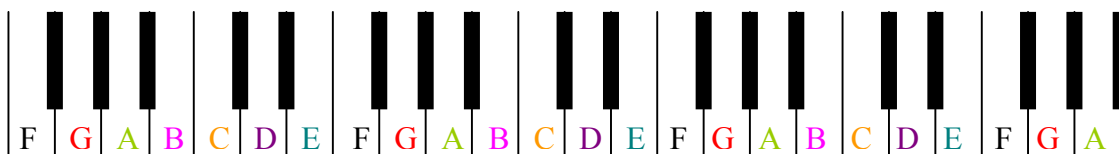
A descoberta de Pitágoras com seu monocórdio efetua uma das mais belas descobertas, que dá a luz, na época ao quarto ramo da matemática: a música. Os Pitagóricos foram os únicos até Aristóteles a fundamentar cientificamente a música, começando a desenvolvê-la e tornando-se aqueles mais preocupados por este assunto.

Posteriormente, um dos mais importantes teóricos musicais do período clássico grego, Arquitas de Tarento (430 – 360a.C.) colaborou de maneira significativa não somente para o desenvolvimento da música mas para o desvendar de seus fundamentos racionais. Ele atribuiu mais atenção a tal arte do que a maioria dos seus predecessores, acreditando que a música deveria assumir um papel mais importante que a literatura na educação das crianças. Para os pitagóricos, a teoria musical dividia-se no estudo da natureza das propriedades dos sons, no estabelecimento e no cálculo respectivamente dos intervalos musicais e proporções musicais. Segundo Ptolomeu, Arquitas escreveu trabalhos científicos principalmente relacionados ao último tema, sem deixar de dedicar-se aos dois primeiros, especialmente no que concerne à consonância. Entre suas contribuições, há evidências de que ele possivelmente tenha modificado a denominação da média subcontrária para média harmônica provavelmente pelo fato do comprimento relativo ao intervalo de quinta - $\frac{2}{3}$ da corda inteira – ser de grande valor harmônico.

Na idade média, temos uma forte contribuição do cidadão romano e escrito Boetius (480 – 524d.C) para a sistematização da música ocidental escrevendo sobre as disciplinas matemáticas – aritmética, música, geometria e astronomia -, lógica, teologia e filosofia. Neste período até o Renascimento, a música ocidental sofre mudanças substanciais que partem de uma concepção exclusivamente melódica rumo a um caráter principalmente harmônico. É a partir do Renascimento que as interações entre a matemática e música se tornam ainda mais fortes com Gioseffe Zarlino (1517 – 1590) e Marin Mersenne (1588 – 1648).

CAPÍTULO 2: ENTENDENDO UM POUCO SOBRE TEORIA MUSICAL

Como vimos, o italiano Guido d'Arezzo desenvolveu um algoritmo correspondendo as notas musicais à letras do alfabeto as quais estão indicadas no teclado que segue



Figura(2.1): teclado de um piano

Repare que entre as teclas B e C ou entre E e F não existem teclas pretas. O intervalo entre estas notas irá diferir de um semitom enquanto que as demais, as quais possuem as teclas pretas, diferem de um tom. As teclas pretas podem ser chamadas tanto bemóis quanto sustenidos, dependerá apenas da escala a que ela pertencer.

As escalas são uma seqüência de notas que obedecem a determinados padrões e compreendem o espaço que vai de uma nota de determinada freqüência à outra com o dobro desta. Na escala musical há sete notas diferentes, repetindo-se a primeira com a última, embora esta tenha o dobro da freqüência da primeira (ou metade do comprimento de corda), e esteja uma oitava acima, ou seja, à direita. A oitava significa, portanto, que uma nota se torna a oitava a contar da primeira.

Como foi falado, a razão 1 para 2 chama-se oitava e na escala temperada, uma oitava é dividida em 12 partes iguais. Logo, altura de cada semitom irá diferir do anterior de $2^{1/12}$ e o tom de $2^{2/12}$.

A notação musical da escala maior é baseada na escala de dó maior ou simplesmente C. Na escala maior há cinco tons e dois semitons os quais obedecem a seqüência *tom, tom, semitom, tom, tom, tom e semitom*. Subindo um semitom da terceira, da sexta e da sétima nota da escala maior forma-se a escala menor natural. Sua seqüência é *tom, semitom, tom, tom, semitom, tom e tom*. As escalas maiores são representadas apenas pelas letras maiúsculas enquanto que as escalas menores possuem suas letras maiúsculas acompanhadas de um “m” minúsculo e subscrito.

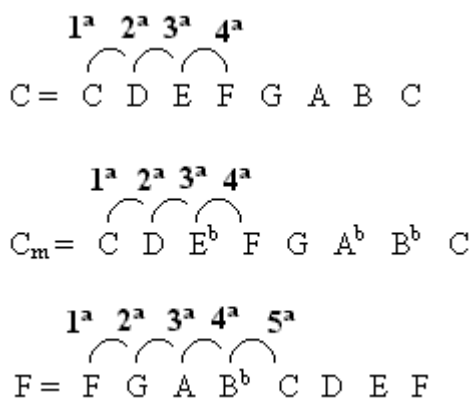
Além disso, ambas podem vir acompanhadas de bemóis ou sustenidos, os quais serão melhor explicados nos próximos parágrafos.

Repare que quando utilizamos a escala de C, trabalhamos apenas com as teclas brancas (C, D, E, F, G, A, B, C) assim como quando produzimos a escala de A_m (A, B, C, D, E, F, G, A).

Como para notação em música usamos apenas sete notas musicais, o sinal # (sustenido) é colocado na frente da nota para indicar as de semitom acima e b (bemol) para indicar as de semitom abaixo. Estes sinais são chamados acidentes. O semitom acima do C é o C^\sharp (lê-se dó sustenido) e o semitom abaixo do D é o D^b (lê-se ré bemol); na escala temperada, estes sons são idênticos e diferem de C por $2^{1/12}$. Estas notas com nomes diferentes, mas com frequências iguais, são chamadas enarmônicas. Uma maneira prática de decidirmos qual nome usar nas escalas é: use C^\sharp se o C não aparecer na escala e D^b se quem não aparecer for o D.

Vejam os por exemplo que para tocarmos a escala de D (lê-se ré maior) devemos tocar D, E, F^\sharp , G, A, B, C^\sharp , D. Repare que F^\sharp é igual G^b , mas como o G aparece nesta escala optamos pela nota anterior. O mesmo ocorre com o C^\sharp .

Um intervalo musical entre duas notas é determinado por números ordinais que relacionam a posição entre a nota e a primeira da escala a que esta pertence. Assim, o intervalo C-E é uma terça maior, pois E é a terceira nota da escala de C maior (*figura 3*). O intervalo C-F é uma quarta tanto maior quanto menor pois F é a quarta nota tanto da escala de C quanto de C_m , o intervalo F-C' é uma quinta (C' refere-se ao primeiro C depois do F).



Figura(2.2): determinação dos intervalos musicais.

CAPÍTULO 3: AS RAZÕES NA MÚSICA

Os pitagóricos foram os primeiros a registrar a descoberta de que estando dois fios esticados, se estes fossem tocados simultaneamente o som seria agradável se as razões entre os seus comprimentos fossem formadas por um conjunto de números simples. Eles observaram que as relações existentes entre os comprimentos dos fios sempre obedeciam a determinadas razões em certos intervalos.

Tabela(3.1): Relação entre os intervalos e comprimentos de corda segundo os pitagóricos

<i>Intervalo</i>	<i>Razão entre o comprimento das cordas</i>
Oitava	2:1
Quinta	3:2
Quarta	4:3
Sexta	27:16
Terça	81:64
Segunda	9:8
Sétima	243:128

Devido a algumas razões serem um tanto quanto complicadas, Zarlino propôs algumas simplificações, as quais foram facilmente aceitas por realmente serem mais simples.



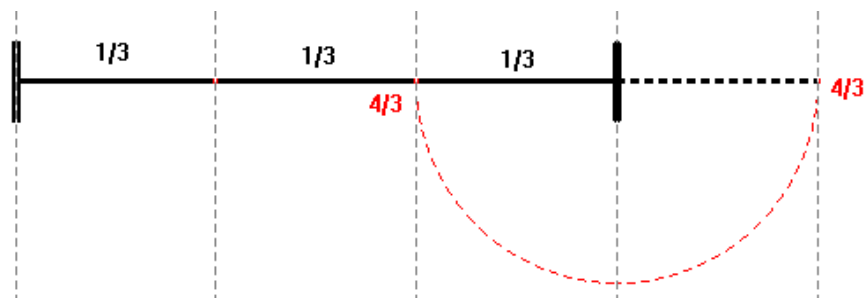
Figura(3.1): Zarlino

Tais razões se resumiam da seguinte forma:

Tabela(3.2): Relação entre os intervalos e comprimentos de corda segundo aproximação de Zarlino

<i>Intervalo</i>	<i>Razão entre o comprimento das cordas</i>
Oitava	2:1
Quinta	3:2
Quarta	4:3
Sexta	5:3
Terça	5:4
Segunda	9:8
Sétima	15:8

Para melhor visualizarmos o que acontece com os comprimentos, podemos pensar em uma determinada corda de comprimento 12 u.m. ; a qual chamaremos de C nos próximos exemplos. Tomando metade do seu tamanho (6 u.m.), encontraremos o C' (ou C oitava acima), uma vez que o comprimento da primeira será duas vezes maior que o da segunda e portanto o intervalo considerado é a oitava. Se a dividirmos em três partes iguais e tomando quatro (12 u.m. ou 8 u. m. se quisermos considerar apenas o intervalo de uma oitava), obteremos desta vez a nota F, a qual forma um intervalo de quarta com o C considerado.



Figura(3.2): intervalo de quarta

Procedendo desta maneira, é possível determinar os demais comprimentos deste intervalo musical, como na *tabela 3.3*. Repare que os comprimentos de corda das notas estão relacionadas segundo regras de três simples, levando sempre em consideração as razões obtidas na *tabela 3.2*. e as posições na

oitava a que pertencem. Nos próximos exemplos iremos considerar apenas as escalas maiores embora os cálculos realizados sejam válidos para os dois casos.

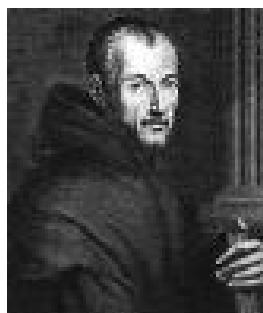
Tabela(3.3): Relação entre notas e seus comprimentos de corda

<i>Notas</i>	<i>Comprimento(u.m.)</i>
<i>C</i>	24
<i>D</i>	21,3
<i>E</i>	19,2
<i>F</i>	18
<i>G</i>	16
<i>A</i>	14,4
<i>B</i>	12,8
<i>C</i>	12
<i>D</i>	10,6
<i>E</i>	9,6
<i>F</i>	9
<i>G</i>	8
<i>A</i>	7,2
<i>B</i>	6,4
<i>C</i>	6

O matemático francês Marin Mersenne (1588 – 1648) fez a conexão entre o comprimento de uma corda esticada e a frequência da nota por ela produzida. Ele fez uma série de experimentos que resultou na fórmula

$$f = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{m}} \quad (1)$$

onde f é a *freqüência* da nota em vibrações (ou ciclos) por segundo (hertz), L é o *comprimento* dado em centímetros da corda, T é a *tensão* ou força que age sobre a corda, medida em *Newton (N)*, n é um número inteiro e m a *massa*, em *g/cm* de corda. Note que a frequência é inversamente proporcional ao comprimento da corda; logo, quanto maior for o comprimento da corda, menor será a frequência, ou seja, o som será mais grave; e quanto menor for o comprimento da corda, maior será a frequência e o som será mais agudo.



Figura(3.2): Marin Mersenne

Atendo-nos apenas a relação existente entre a frequência e o comprimento da corda, podemos escrever uma nova tabela, relacionando-as:

Tabela(3.4): Relação entre as razões das frequências e dos comprimentos de corda

<i>Intervalo</i>	<i>Razão entre o comp. das cordas</i>	<i>Razão entre as frequências</i>
Oitava	2:1	1:2
Quinta	3:2	2:3
Quarta	4:3	3:4
Sexta	5:3	3:5
Terceira	5:4	4:5
Segunda	9:8	8:9
Sétima	15:8	8:15

Sabendo que a frequência da nota A da oitava mediana de um piano é 440 hzt^4 , podemos, por meio da *tabela3.3*, escrever a relação entre as frequências da notas de forma semelhantes à usada nos cálculos dos comprimentos das cordas. Devemos apenas estar atentos aos intervalos, os quais estão diretamente relacionados com a posição na escala a que a nota pertence.

Tabela(3.5): Relação entre notas e frequências

<i>Notas</i>	<i>Frequência</i>
<i>A</i>	220
<i>B</i>	247,5

⁴ A nota A com frequência de 440 hzt é muito utilizada na afinação de pianos.

<i>C</i>	264
<i>D</i>	297
<i>E</i>	330
<i>F</i>	352
<i>G</i>	396
<i>A</i>	440
<i>B</i>	495
<i>C</i>	528
<i>D</i>	594
<i>E</i>	660
<i>F</i>	704
<i>G</i>	783
<i>A</i>	880

Podemos perceber que a razão entre os comprimentos das cordas e a razão entre as frequências das notas de oitavas diferentes, são apenas próximas nesta escala formada. Isto ocasionava problemas no desenvolvimento dos teclados e alguns instrumentos de corda uma vez que as melodias acabavam sendo modificadas de uma oitava para outra. Para tocar em claves⁵ diferentes e com intervalos que soem direito, seria necessário afinar os instrumentos a cada mudança fundamental como fazem alguns violinistas e flautistas, o que é praticamente impossível para um pianista por exemplo.

Foi então que Mersenne, em 1635, propôs um sistema de afinação suave, também conhecido como torneamento “igual-suave” ou escala temperada, pois requer que as relações de frequência de quaisquer meios-tons adjacentes sejam constantes.

Tal sugestão só começou a ser aceita após as composições de “O Cravo Bem Temperado” de Bach em 1722 e 1744.



Figura(3.4): Johann Sebastian Bach

⁵ Clave é um sinal que serve para indicar o nome das notas e a altura dos sons.

CAPÍTULO 4: A FREQUÊNCIA SOB UM NOVO ÂNGULO

Para que possamos calcular tais intervalos de frequência entre as notas em uma escala temperada, basta pensar que o intervalo ‘i’ entre as notas é igual, ou seja, cada nota é obtida pela multiplicação desse valor sucessivas vezes até que resulte na nota esperada.

Se pensarmos com relação a uma oitava, a qual possui 12 intervalos então a relação $i^{12} = 2$ seria verdadeira uma vez que após 12 intervalos a frequência da nota dobra. Desta forma é possível determinar qual será o intervalo ‘i’ que nos fornece a escala proposta por Mersenne em 1635, da seguinte maneira: se $i^{12} = 2$ então $i = \sqrt[12]{2}$ logo $i = 1,0594631$.

Logo, podemos verificar que os dados obtidos segundo a *tabela 4.1* são bem próximos na escala temperada, não proporcionando assim grande diferença ao resultado final das obras apresentadas.

Tabela(4.1): Diferença entre frequências das escalas

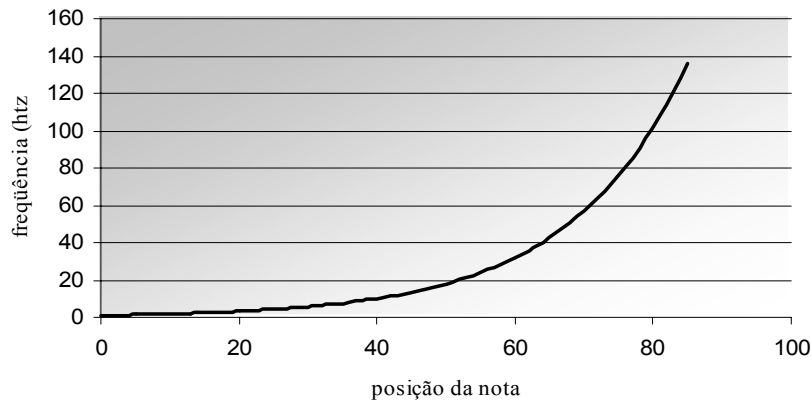
<i>Notas</i>	<i>Frequência (htz) escala de Zarlino</i>	<i>Freq. (htz) na escala logarítmica</i>
<i>A</i>	220	220
<i>B</i>	247,5	246,9
<i>C</i>	264	261,6
<i>D</i>	297	296,6
<i>E</i>	330	329,6
<i>F</i>	352	349,2
<i>G</i>	396	391,9
<i>A</i>	440	440
<i>B</i>	495	493,8
<i>C</i>	528	523,2
<i>D</i>	594	593,2
<i>E</i>	660	658,4
<i>F</i>	704	698,4
<i>G</i>	783	783,8
<i>A</i>	880	880

Ao estabelecermos a relação entre as notas e suas respectivas frequências podemos perceber que tal comportamento se dará de maneira

exponencial enquanto que os comprimentos das cordas que produzem estas frequências crescerão inversamente, segundo Mersenne, ou seja, quanto mais alta for a frequência, menor será o comprimento da corda que a produz e conseqüentemente menor será o comprimento de onda.

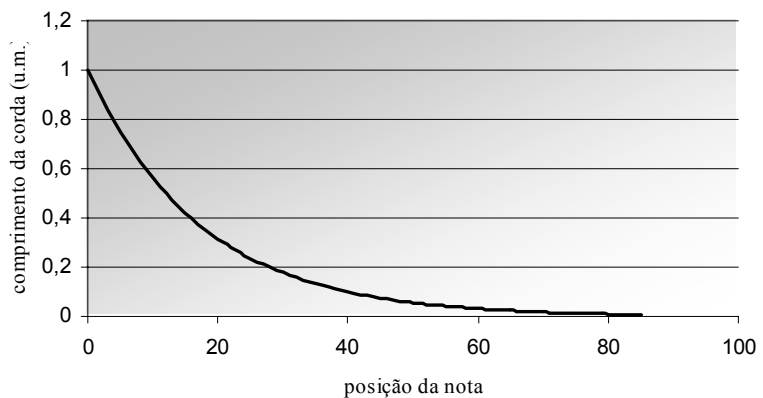
$$\begin{array}{cccccccccccccc}
 \text{C} & \text{b/\#} & \text{D} & \text{b/\#} & \text{E} & \text{F} & \text{b/\#} & \text{G} & \text{b/\#} & \text{A} & \text{b/\#} & \text{B} & \text{C} \\
 \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^0 & \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^1 & \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^2 & \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^3 & \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^4 & \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^5 & \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^6 & \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^7 & \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^8 & \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^9 & \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{10} & \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{11} & \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{12} \\
 \hline
 & & & & \text{notas musicais} & & & & & & & & \\
 \hline
 f_{\text{inicial}} & & & & & & & & & & & & f_{\text{final}}
 \end{array}$$

Figura(4.1): relação entre as frequências das notas



Figura(4.2): comportamento das frequências

comportamento das frequências



Figura(4.3): comportamento dos comprimentos de corda

Além dessas propriedades, a frequência nos fornece o número de intervalos entre oitavas, o qual é dado por uma relação entre a frequência inicial e a frequência final da seguinte maneira

$$f_{inicial} = (2^{1/12})^0 = 2^0 = 1 \rightarrow \log_2 f_{inicial} = 0 \quad (1)$$

$$f_{final} = (2^{1/12})^{12} = 2^1 = 2 \rightarrow \log_2 f_{final} = 1 \quad (2)$$

Desta forma podemos perceber que ao relacionarmos estas duas propriedades segundo uma razão, encontraremos o número de intervalos procurados, que, no caso do exemplo é exatamente uma oitava.

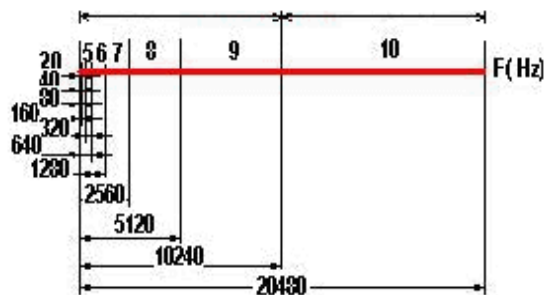
$$\frac{\log_2 f_{inicial}}{\log_2 f_{final}} = \log_2 \frac{2}{1} = 1 \quad (3)$$

Se considerarmos a faixa audível ao homem, que é de 20 a 20.000 hztz, podemos verificar que tal intervalo entre as frequências é inferior a 10 oitavas.

$$\frac{\log_2 20000}{\log_2 20} = x \rightarrow x \log 2 = \log 1000 \rightarrow x = 9,9657841 \quad \text{oitavas} \quad (4)$$

Tais relações são muito utilizadas, principalmente por fabricantes de instrumentos, que apesar de muitas vezes não saberem os por quês do uso de tais relações, sabem que são de fundamental importância principalmente no fabrico dos instrumentos com trastes como violão, bandolim entre outros.

Analisando o comportamento das frequências audíveis distribuídas ao longo de 10 oitavas



Figura(4.4): distribuição de frequências ao longo 10 oitavas.

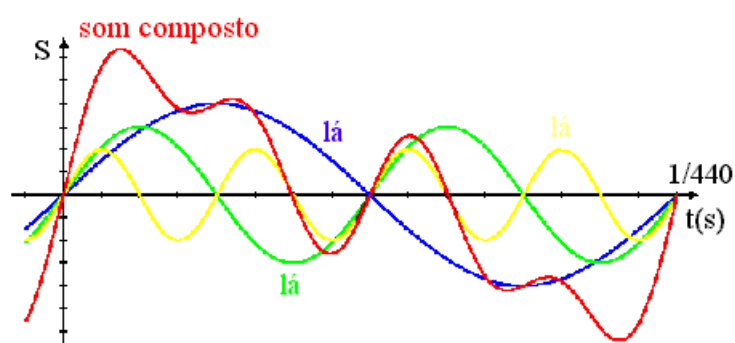
Tabela(4.2): distribuição das frequências ao longo de 10 oitavas.

Oitava	Frequência
1	20-40
2	40-80
3	80-160
4	160-320
5	320-640
6	640-1280
7	1280-2560
8	2560-10240
9	5120-10240
10	10240-20480

Podemos perceber que como seus intervalos são logarítmicos, as variações das frequências variam ao longo das oitavas, por exemplo na primeira oitava temos a frequência variando de 20 à 40 Hz, já na décima oitava a frequência se encontra variando entre 10240 e 20480 Hz. Apesar da figura (4.4) nos induzir a pensar que o meio de nossa faixa de áudio é 10240 Hz devido a maneira como está disposto devemos prestar atenção pois é a 5ª oitava, a qual tem intervalo de frequência variando entre 320 – 640 Hz.

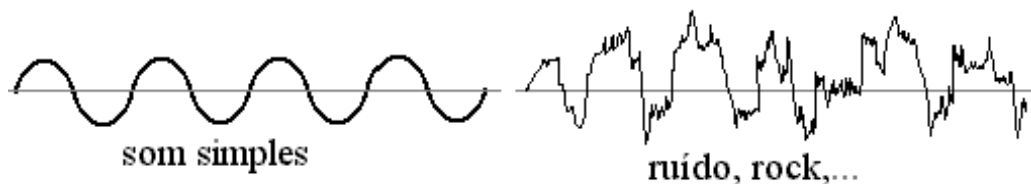
CAPÍTULO 5: AS ONDAS NA MÚSICA

Quando dedilhamos a corda esticada de um violão, ela vibra e produz sons que podem ou não ser agradáveis aos nossos ouvidos. Tais vibrações se projetam por meio de ondas que podem facilmente ser identificadas com as funções seno ou co-seno, quando os sons forem puros, ou como uma sobreposição de ambas quando os sons forem compostos.



Figura(5.1): Superposição de três sons simples resultando num som composto.

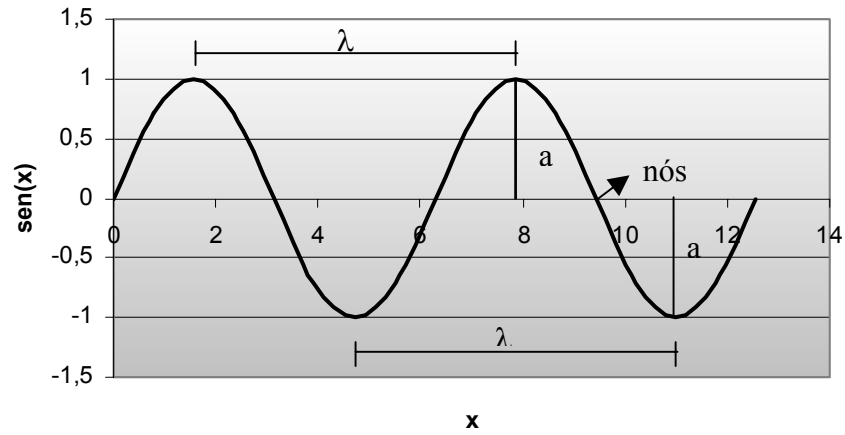
Quanto ao efeito sobre o ouvido, os sons são classificados em sons musicais e ruídos. Subjetivamente esta classificação deixa muito a desejar, pois há quem considere por exemplo o rock'n rol como um ruído e outros como um som musical.



Figura(5.2): representação de um som simples e de um ruído.

Fisicamente, devemos entender um som musical como o resultado da superposição de ondas sonoras periódicas ou aproximadamente periódicas e ruídos como ondas sonoras não-periódicas e breves, que mudam imprevisivelmente suas características.

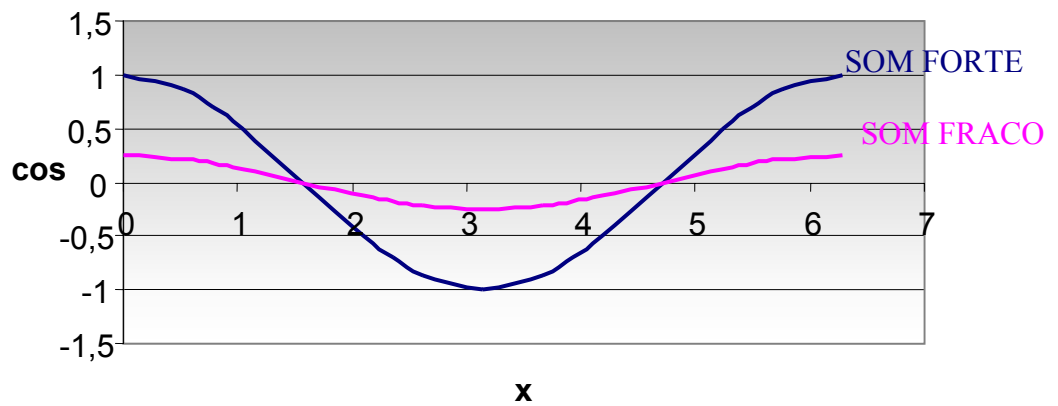
Analisando uma onda, é possível determinarmos a amplitude “ a ”, o comprimento de onda “ λ ”, os ventres e os vales.



Figura(5.3): Elementos de uma onda

Os sons simples distinguem-se uns dos outros pela *intensidade* e *altura* enquanto que os sons compostos, além destas diferenciam-se também pelo *timbre*.

A *intensidade* do som esta ligada à amplitude das vibrações; ela é a qualidade pela qual um som forte (grande amplitude) se distingue de um som fraco (pequena amplitude).



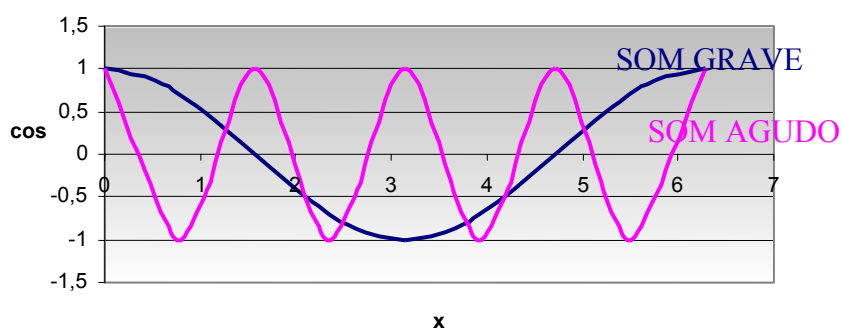
Figura(5.4): Amplitude das Vibrações

Tabela(5.1): Relação entre som forte e som fraco por meio de funções trigonométricas.

X	Som Forte cos (x)	Som Fraco cos (x)/4
0	1	0,25
0,523599	0,866025	0,216506
0,785398	0,707107	0,176777
1,047198	0,5	0,125
1,570796	6,13E-17	1,53E-17
2,094395	-0,5	-0,125
2,356194	-0,70711	-0,17678
2,617994	-0,86603	-0,21651
3,141593	-1	-0,25
3,665191	-0,86603	-0,21651
3,926991	-0,70711	-0,17678
4,18879	-0,5	-0,125
4,712389	-1,8E-16	-4,6E-17
5,235988	0,5	0,125
5,497787	0,707107	0,176777
5,759587	0,866025	0,216506
6,283185	1	0,25

A intensidade do som captada pelo ouvido corresponde à sensação do que se denomina popularmente por volume do som. Quando o som tem uma determinada intensidade mínima (frequência inferior a 20 Hz), o ouvido humano não o capta. Quando a intensidade é elevada (frequência superior a 20.000 Hz), o som provoca uma sensação dolorosa e até inaudível.

A *altura* do som irá diferenciar-se quanto ao fato de ser agudo ou grave, e está ligada unicamente à sua frequência. Ela determina a qualidade pela qual um som grave (som baixo - frequência baixa) se distingue de um som agudo (som alto - frequência alta).

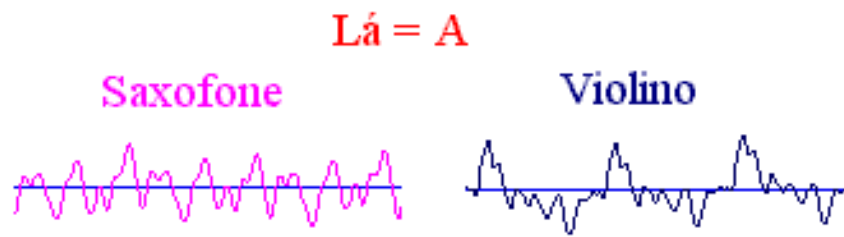


Figura(5.5): Frequência das Vibrações

Tabela(5.2): Relação entre som grave e agudo por meio de funções trigonométricas.

x	cos (x)	cos (4x)
0	1	1
0,523599	0,866025	-0,5
0,785398	0,707107	-1
1,047198	0,5	-0,5
1,570796	6,13E-17	1
2,094395	-0,5	-0,5
2,356194	-0,70711	-1
2,617994	-0,86603	-0,5
3,141593	-1	1
3,665191	-0,86603	-0,5
3,926991	-0,70711	-1
4,18879	-0,5	-0,5
4,712389	-1,8E-16	1
5,235988	0,5	-0,5
5,497787	0,707107	-1
5,759587	0,866025	-0,5
6,283185	1	1

O *timbre* nos permite distinguir dois sons de mesma altura emitidos por diferentes fontes sonoras. Ele depende dos harmônicos associados ao som fundamental e as ondas superposta no caso dos sons compostos. Por exemplo, podemos considerar uma determinada nota dó sendo emitida por dois instrumentos diferentes: uma flauta e um violino e ver como estes se comportam graficamente.



Figura(5.6): ondas representado o timbre de uma nota Lá

A fim de explorarmos os conceitos trabalhados anteriormente, podemos utilizar alguns softwares como “Sonic Foundy Sound Forge XP”, “Construindo Sons” e “Sinewave”:

- *Sonic Foundy Sound Forge XP*

Nos utilizando deste software é possível termos uma noção maior sobre o comportamento de um determinado som. Podemos, por exemplo, gravar diferentes sons produzidos pelos alunos e verificar as diferenças entre um som forte e um fraco, o som grave e o agudo.

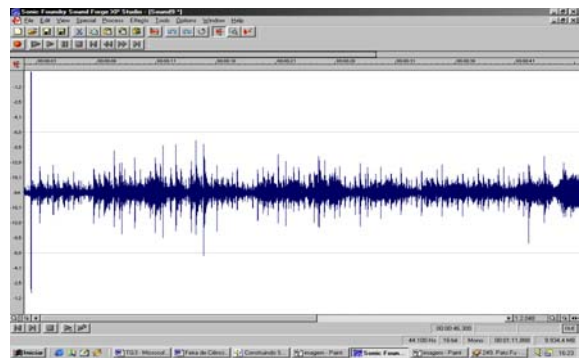


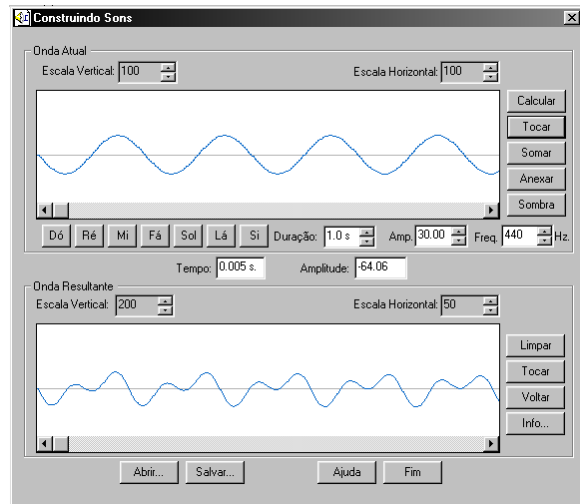
Figura (5.7): Tela do software *Sound Forge*

- *Construindo Sons*

Este software explora as propriedades das ondas como frequência, amplitude, período e sobreposição destas oscilações. Por meio deste é possível explorar uma oscilação simples, a qual é descrita por uma equação do tipo:

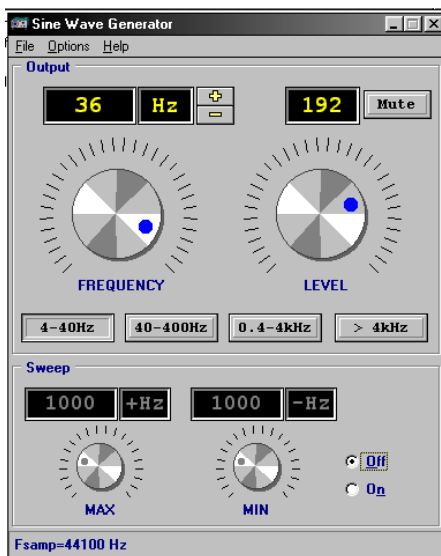
$$G(t) = A \text{ sen } (2\pi f t), \quad (1)$$

onde $G(t)$ é a grandeza que oscila, A é a amplitude da oscilação, f a frequência da oscilação = 3.14159... e t o tempo. Além desta, podemos encontrar várias outras definições disponíveis em “Ajuda”, as quais podem ser de grande utilidade a um professor interessado no assunto. Tal software dói desenvolvido pela *Estação Ciência* da Universidade de São Paulo.



Figura(5.8): Tela do software *Construindo Sons*

- *Sine Wave*



Figura(5.9): Tela do software *Sine Wave*

Este é um software desenvolvido pela Electronics Lab Sine Wave Generator - 3.0, ele consiste em gerar frequências a partir de 4 Hz e segue até ser superior a 4.000 Hz.

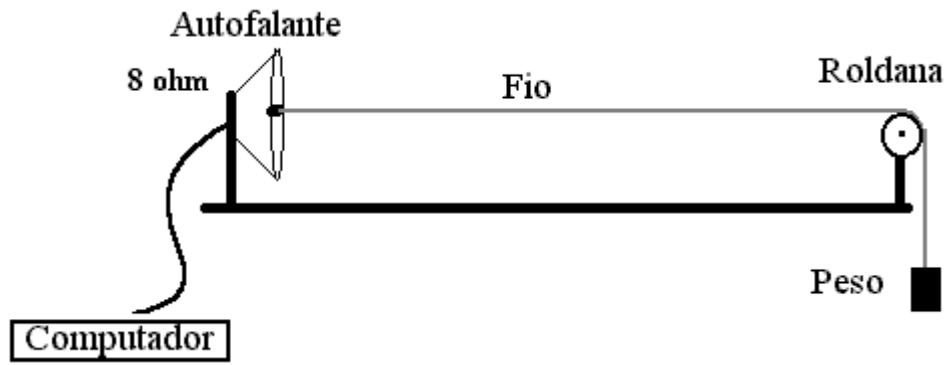
Com este software é possível explorar algumas propriedades das ondas sabendo por exemplo que cada modo de vibração (n) é meio comprimento de onda ($\lambda/2$), então se uma corda possui n modos de vibração, então:

$$L = n \cdot \lambda/2 \quad (2)$$

Além disso, sabendo que a velocidade de propagação (V) do som é constante (366 m/s) e é dada por

$$V = \lambda \cdot f_n \quad (3)$$

podemos verificar algumas importantes propriedades das ondas.



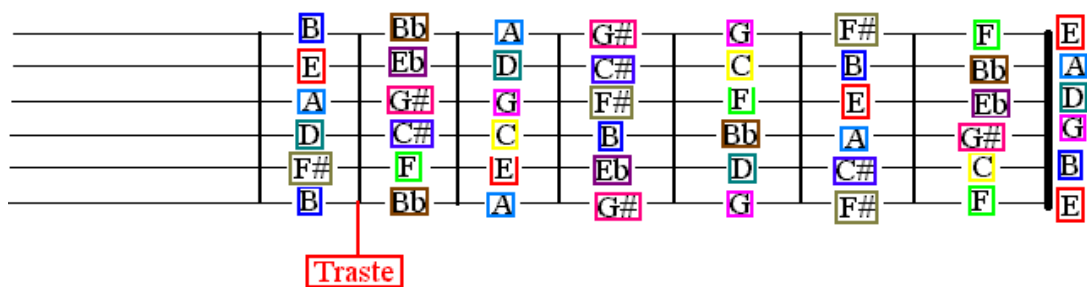
Figura(5.10): Aparato para ser utilizado junto os Sinewave

Com este aparato podemos explorar quantidade de nós que serão produzidos dependendo do comprimento e da tensão que está sendo aplicada ao fio, entre outros, ou melhor, determinamos o número de harmônicos⁶ existentes em um determinado intervalo.

⁶ Harmônicos refere-se ao número de $\lambda/2$ existentes em um determinado intervalo.

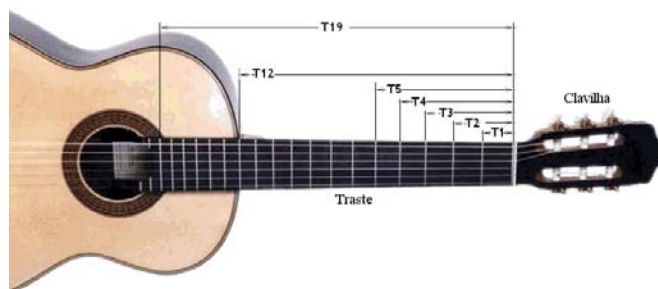
CAPÍTULO 6: OS LOGARÍTMOS NO DIMENSIONAMENTO DE TRASTES

Ao considerarmos um violão, por exemplo, precisamos primeiramente conhecer como as notas estão dispostas sobre seu braço. Para isso, devemos ter sempre em mente que este é formado por seis cordas as quais soltas produzem as notas E (164,8Hz), A (220Hz), D (293,7), G (392 Hz), B (493,9 Hz) e E (659,3 Hz) respectivamente. A partir destas cordas podemos tocar as demais notas apenas aumentando e/ou diminuindo o tamanho de suas cordas pressionado sobre os trastes.



Figura(6.1): parte do braço de um violão com as respectivas notas produzidas

Para determinarmos qual a melhor posição para um determinado traste, devemos lembrar que as frequências das notas são inversamente proporcionais aos comprimentos de corda, ou seja, fazendo $(2^{1/12})^x \cdot 1 / (2^{1/12})^x = 1$. As relações entre a frequência emitida e o comprimento da corda deve ser constante e igual a 1. Logo, para descobrirmos qual o melhor lugar para posicionarmos um determinado traste entre a *pestanda* e o *cavalete*, devemos fazer $1 / (2^{1/12})^x$ onde x é a ordem do traste. Por exemplo, ao considerarmos o 12º traste do braço de um violão teremos $1 / (2^{1/12})^{12} = 1/2$, ou seja, o traste de ordem 12 fica exatamente na metade do comprimento da corda livre (ou escala).



Figura(6.2): Posicionamento dos trastes de um violão

Como vimos, as frequências crescem exponencialmente enquanto o *comprimento* das cordas que produzem estas frequências cresce inversamente, ou seja, quanto mais alta for a frequência *menor* é o comprimento da corda que a produz estas frequências, e menor é o comprimento de onda produzido. Assim, podemos escrever a expressão que nos permite calcular as distâncias dos trastes que produzirão as frequências que queremos gerar. Para isso, devemos considerar

$$t_n = c_e (1 / 2^{1/12})^n \quad (1)$$

onde

n: ordem do traste;

t_n: distância do traste de ordem *n*;

c_e: comprimento da escala (corda solta ou distância entre os suportes fixos);

Podemos tomar vários exemplos de instrumentos de corda e verificar como tal conceito pode ser trabalhado. No caso analisaremos um baixo (de quatro cordas) e a distância entre os trastes até a ordem 20, ou seja, *t₂₀*. Tal procedimento poderá ser verificado por meio da visualização no instrumento e da tabela.

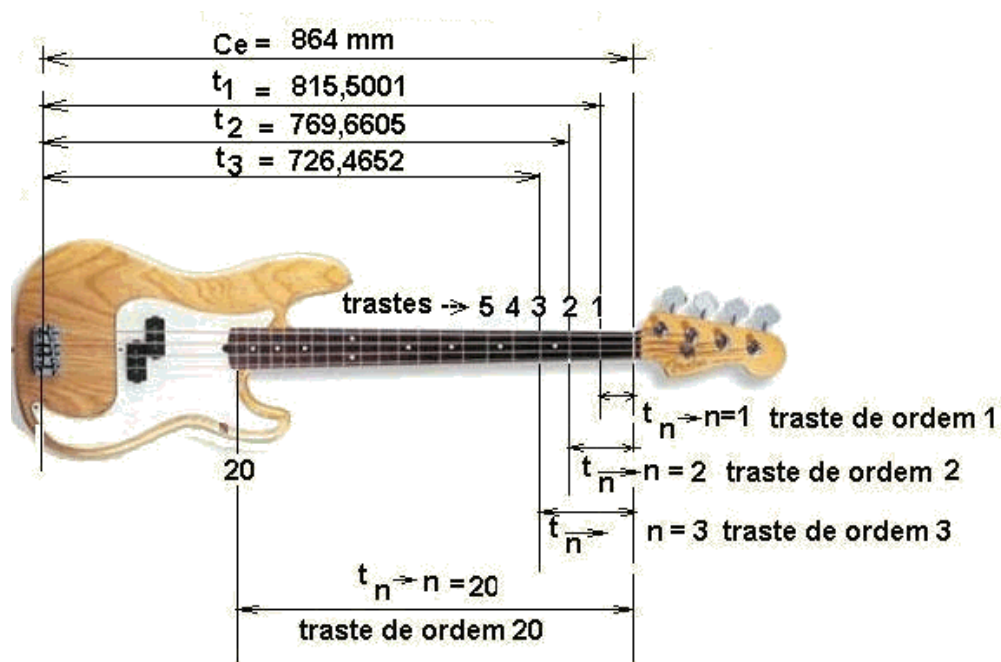


Figura (6.3): distância dos trastes de um baixo até o cavalete

Tabela (6.1): relação entre a ordem do traste e a distância deste até o cavalete.

Ordem do traste	Distância do traste
1	864
2	815,5074
3	769,7365
4	726,5345
5	685,7573
6	647,2687
7	610,9403
8	576,6508
9	544,2859
10	513,7375
11	484,9036
12	457,6881
13	432
14	407,7537
15	384,8682
16	363,2673
17	342,8786
18	323,6343
19	305,4701
20	288,3254

Tal conceito também pode ser explorado em alguns instrumentos de trastes como bandolim, violão, viola caipira, guitarra, entre outros; basta apenas que conheçamos os comprimentos de corda de cada instrumento.

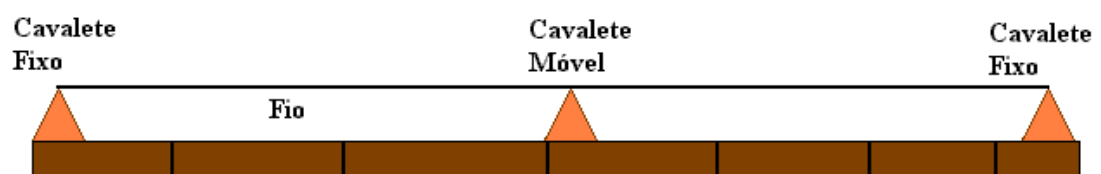


Figura (6.4): Instrumentos de traste: Bandolim, violão, guitarra



Figura (6.5.): instrumentos de traste: contrabaixo, cavaquinho e viola caipira

Para explorar alguns dos conceitos mencionados acima podemos fazer uso do experimento dos pitagóricos, o monocórdio, e trabalhar com atividades que relacionam, por exemplo, um determinado comprimento L aos intervalos produzidos por $4L/9$; ou então, sabendo que L corresponde a uma determinada nota então qual deverá ser o comprimento que produzirão duas quartas acima, ou uma quinta acima. Como estas, várias outras questões podem ser exploradas de modo a explorar os conceitos de razão com o uso do monocórdio, o qual pode ser facilmente construído com dois cavaletes fixos à um pedaço de madeira, um fio ligando estes e um outro cavalete móvel para deslizar sobre a madeira e determinar os intervalos correspondentes.



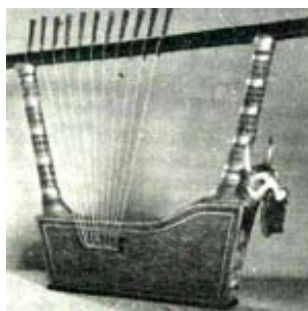
Figura(6.6): monocórdio

CAPÍTULO 7: ANALISANDO OS LOGARÍTMOS NOS INSTRUMENTOS MUSICAIS

Podemos ainda perceber o comportamento logarítmico mais aparente das notas em outros instrumentos musicais, que não os de trastes. É o caso por exemplo da flauta, do xilofone, da lira, do piano de cauda, entre outros.



Figura(7.1): Flauta e Xilofone



Figura(7.2): Lira, Harpa e Piano

O motivo capaz de tornar instrumentos destes tipos ainda mais interessantes, é o fato de por meio destes, podermos utilizar estratégias palpáveis e interessantes que abordam conteúdos não só matemáticos e físicos por meio da música, mas também outras ligações interdisciplinares.

A fim de buscar tais estratégias de ensino, passaremos a seguir, a descrever e comentar a construção de uma flauta semelhante à figura (7.1) com tubos de PVC de $\frac{1}{4}$ polegadas. Precisamos construir um conjunto de treze tubos que reproduzam uma oitava da escala logarítmica. Precisamos partir do menor tubo, o qual reproduz a nota mais aguda da escala e determinar o comprimento dos 12 tubos subsequentes, numa progressão geométrica de razão $2^{1/2}$.

Escolhemos, por exemplo, um comprimento de tubo que reproduza o *dó* de 256 Hz. Seja 344 m/s a velocidade do som se propagando no ar a uma pressão

de 1 atm e uma temperatura de 20°. Se $V = \lambda \cdot f$, onde v é a velocidade de propagação do som, λ é o comprimento de onda e f é a frequência então temos que:

$$344 = 256 \cdot \lambda \Rightarrow \lambda = 344/256 \Rightarrow \lambda = \mathbf{1,34375} \quad (1)$$

Considerando um tubo fechado de comprimento L , temos que $\lambda = 4L$. Desta forma, o comprimento do tubo será:

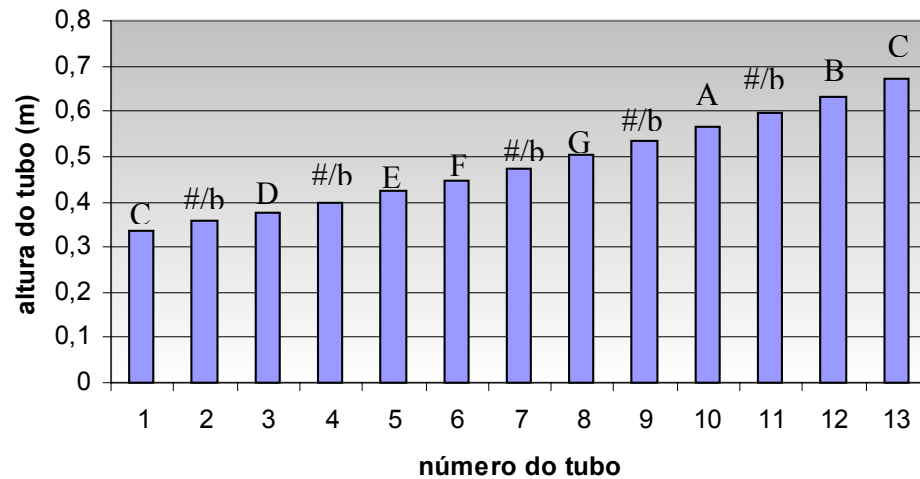
$$\lambda = 4L \Rightarrow L = 1,34375/4 \Rightarrow \mathbf{L = 0,3359} \quad (2)$$

Podemos então verificar que os comprimentos do demais tubos serão respectivamente:

Tabela(7.1): dimensionamento dos 13 tubos, considerando a progressão geométrica de razão $2^{1/12} \cong 1,05946$

Nota	Termo da Progressão	Comprimento do Tubo (m)
C	a_1	0,3359
C# / Db	$a_2 = a_1 \cdot r^1 = 0,3359 \cdot (2^{1/12})^1$	0,355873653
D	$a_3 = a_1 \cdot r^2 = 0,3359 \cdot (2^{1/12})^2$	0,377035002
D# / Eb	$a_4 = a_1 \cdot r^3 = 0,3359 \cdot (2^{1/12})^3$	0,39945467
E	$a_5 = a_1 \cdot r^4 = 0,3359 \cdot (2^{1/12})^4$	0,423207481
F	$a_6 = a_1 \cdot r^5 = 0,3359 \cdot (2^{1/12})^5$	0,448372707
F# / Gb	$a_7 = a_1 \cdot r^6 = 0,3359 \cdot (2^{1/12})^6$	0,475034336
G	$a_8 = a_1 \cdot r^7 = 0,3359 \cdot (2^{1/12})^7$	0,503281347
G# / Ab	$a_9 = a_1 \cdot r^8 = 0,3359 \cdot (2^{1/12})^8$	0,533208013
A	$a_{10} = a_1 \cdot r^9 = 0,3359 \cdot (2^{1/12})^9$	0,564914212
A# / Bb	$a_{11} = a_1 \cdot r^{10} = 0,3359 \cdot (2^{1/12})^{10}$	0,598505759
B	$a_{12} = a_1 \cdot r^{11} = 0,3359 \cdot (2^{1/12})^{11}$	0,634094763
C	$a_{13} = a_1 \cdot r^{12} = 0,3359 \cdot (2^{1/12})^{12}$	0,6718

Ao final deste experimento é possível perceber que enquanto a altura do som cresce linearmente, o comprimento dos tubos crescem numa progressão geométrica de razão $2^{1/12}$ de uma nota para outra.



Figura(7.3): Relação logarítmica entre os tamanhos dos tubos

Utilizando o mesmo princípio, poderíamos ter trabalhado com pedaço de ferro de diferentes tamanhos - respeitando, é claro, o princípio logarítmico adotado acima – e simular um instrumento como o xilofone, ou ainda, simular as cordas de uma harpa ou um piano, embora esta necessite de materiais mais elaborados para poder medir as tensões na corda para que estas sejam constantes.

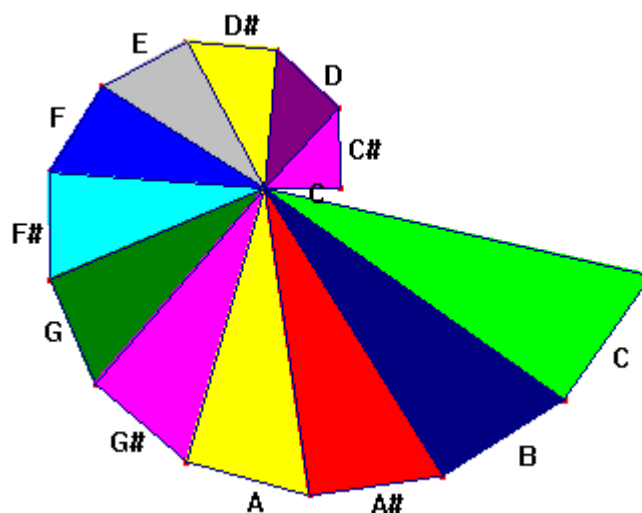
CAPÍTULO 8: O NAUTILUS E OS E AS FREQUÊNCIAS MUSICAIS

Observando a natureza, Galileu percebeu que a matemática está presente em todas as partes e afirmou que a matemática é a linguagem da Física. Podemos verificar um destes fenômenos matemáticos na concha do Nautilus e verificar que o raio foge logaritmicamente do centro .



Figura(8.1): Concha do Nautilus

Devido ao comportamento logarítmico que pode ser observado nos instrumentos musicais, podemos verificar que ao montar uma espiral com estes valores; começando do comprimento 1, obedecendo a razão geométrica $2^{1/12}$, e terminado em 2; verificamos que esta se assemelha a concha do Nautilus.



Figura(8.2): Concha das notas musicais

Para uma melhor visualização de como tal concha foi construída podemos nos utilizar a tabela onde especificamos quais são as notas, a razão de progressão que está envolvida e o comprimento resultante. Podemos perceber pela tabela (8.1) que o primeiro triângulo da figura (8.2) possui catetos 1 (o C) e 1,0594630 (o C#), já o segundo tem com um dos catetos a hipotenusa do anterior e outro cateto a medida 1,122462 (o D), e assim por diante.

Tabela (8.1): Representação das notas e comprimentos dos catetos

Nota	Termo da Progressão	Comprimento dos catetos
C	$a_1 = (2^{1/12})^0$	1
C# / Db	$a_2 = a_1 \cdot r^1 = 1 \cdot (2^{1/12})^1$	1,059463
D	$a_3 = a_1 \cdot r^2 = 1 \cdot (2^{1/12})^2$	1,122462
D# / Eb	$a_4 = a_1 \cdot r^3 = 1 \cdot (2^{1/12})^3$	1,189207
E	$a_5 = a_1 \cdot r^4 = 1 \cdot (2^{1/12})^4$	1,259921
F	$a_6 = a_1 \cdot r^5 = 1 \cdot (2^{1/12})^5$	1,33484
F# / Gb	$a_7 = a_1 \cdot r^6 = 1 \cdot (2^{1/12})^6$	1,414214
G	$a_8 = a_1 \cdot r^7 = 1 \cdot (2^{1/12})^7$	1,498307
G# / Ab	$a_9 = a_1 \cdot r^8 = 1 \cdot (2^{1/12})^8$	1,587401
A	$a_{10} = a_1 \cdot r^9 = 1 \cdot (2^{1/12})^9$	1,681793
A# / Bb	$a_{11} = a_1 \cdot r^{10} = 1 \cdot (2^{1/12})^{10}$	1,781797
B	$a_{12} = a_1 \cdot r^{11} = 1 \cdot (2^{1/12})^{11}$	1,887749
C	$a_{13} = a_1 \cdot r^{12} = 1 \cdot (2^{1/12})^{12}$	2

Podemos perceber que além das várias outras aplicações, a música também está presente na natureza por meio de suas relações matemáticas.

CAPÍTULO 9: A DESCOBERTA DOS GREGOS

Para os gregos, a relação existente entre a matemática e a música era tão forte que descreviam a música como sendo números em movimento.

A escala básica Grega era o *tetracorde*, a qual consistia de apenas quatro notas. Dois tetracordes eram algumas vezes colocados juntos, em diferentes situações, para formar as “grandes escalas”; que nada mais era que a oitava da música ocidental, tanto na sua forma maior quanto menor.

Os matemáticos desta região eram particularmente interessados nos diferentes significados existentes entre os números. Uma de suas descobertas mais interessantes foi com relação as média. Eles perceberam que tais médias tinham uma forte relação com a música, ou mais especificamente, com os comprimentos das cordas que determinavam as notas.

Perceberam que a *média aritmética* entre os comprimentos de corda de duas notas em oitava ‘x’ e ‘y’, dada por ‘a’ e definida como $x - a = a - y$, determinavam o tamanho de corda da nota que forma um intervalo de quarta com a primeira. Se considerarmos os F’s da *figura 6*, cujos comprimentos são 18 e 9, poderemos determinar o comprimento de corda da nota que faz um intervalo de quarta com o primeiro F, ou seja, B^b cujo comprimento será 13,5.

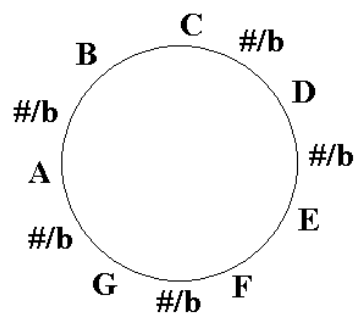
Conhecendo os tamanhos de duas notas consecutivas em oitava ‘x’ e ‘y’, viram que era possível determinar o comprimento de corda da nota que fazia um intervalo de quinta com a primeira por meio da *média harmônica* ‘h’, a qual é definida por $1/x - 1/h = 1/h - 1/y$. Tomando, por exemplo, os comprimentos de corda de dois E’s consecutivos cujas medidas são 19,2 e 9,6 podemos verificar que a média harmônica destes será 12,8, que nada mais é que o B, o qual possui um intervalo de quinta com o primeiro.

Viram ainda que tendo três notas consecutivas em oitava, à *média geométrica* ‘g’ entre o tamanho da superior ‘x’ e da inferior ‘y’, definida por $x/g = g/y$, resultam exatamente no comprimento de corda da nota central. Considerando os três C’s cujos comprimentos de corda das notas das extremidades são 24 e 6 teremos, aplicando na relação descrita, que o C central, dado por ‘g’, terá comprimento 12, exatamente como foi verificado.

Pensando desta forma e conhecendo apenas um dos tamanhos, é possível determinar os demais comprimentos de corda da escala musical utilizando também as médias apresentadas.

Tal fato é possível pois as notas musicais possuem um comportamento modular ou seja elas seguem sempre o mesmo ciclo, ou seqüência.

Podemos tocar qualquer escala similar as já apresentadas começando por qualquer outra nota e usando a combinação de teclas brancas e pretas que respeitem os padrões de intervalos entre tons e semitons mencionado. Vejamos que estas notas podem ser consideradas como um exemplo de aritmética modular (mod 12), uma vez que o padrão das teclas brancas e pretas se repetem a cada doze notas. Desta forma, para formar qualquer escala, devemos escolher a nota, seguir a lei de formação das escalas e sem grandes dificuldades perceber que as notas sempre se repetem após determinado período, diferindo apenas quanto a freqüência.



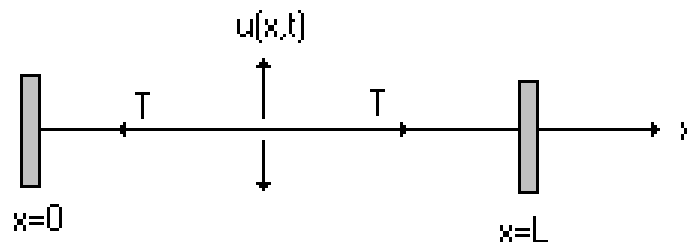
Figura(9.1): seqüência de notas segundo o módulo

CAPÍTULO 10: ANALISANDO O SOM EM UMA CORDA ELÁSTICA

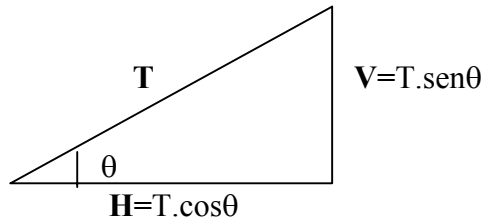
A partir de conhecimentos físicos trataremos o som de maneira mais específica. Faremos a modelagem de um problema de ondas em uma corda elástica de comprimento e espessura determinados.

10. 1. DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DA ONDA

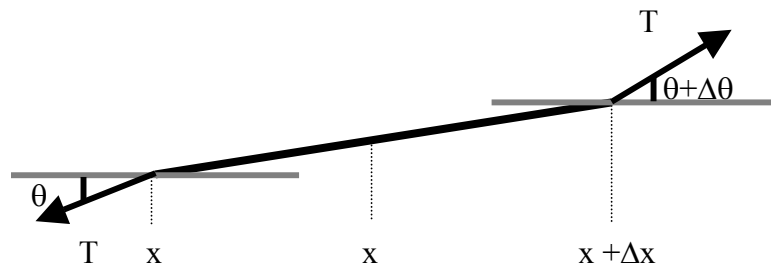
Para que possamos deduzir tal equação, devemos primeiramente fazer algumas considerações importantes. Consideremos uma corda flexível e perfeitamente elástica de comprimento L e espessura ρ , cujas extremidades estão fortemente presas por suportes verticais de tal forma que a corda esteja ao longo de um eixo x . Se a corda for posta em movimento por um movimento de tangência em um certo instante inicial $t=0$ e ficar livres de agentes externos de amortecimento como por exemplo a resistência do ar, ela vibrará livremente em um plano vertical. A fim de determinarmos a equação diferencial que descreve tal movimento, devemos considerar as forças que atuam sobre um pequeno elemento da corda de comprimento Δx , situado entre os pontos x e $x+\Delta x$. Devemos admitir ainda que tal movimento seja pequeno e por isso, cada ponto da corda só se desloque em um segmento de reta vertical o qual denotaremos por $u(x,t)$. Temos que a tensão na corda, a qual sempre atua na direção tangencial será denotada por $T(x,t)$ e a massa por unidade de comprimento da corda será denotada por ρ (*densidade linear*).



Figura(10.1): corda elástica sob tensão



Figura(10.2): decomposição da tensão na corda



Figura(10.3): elemento deslocado da corda elástica

Pela segunda Lei de Newton, temos que a resultante das forças, que atuam em virtude de uma tensão nas extremidades do elemento, deve ser igual ao produto da massa do elemento pela aceleração do centro de massa do mesmo. Uma vez que não temos uma aceleração horizontal, as componentes horizontais devem obedecer:

$$T(x + \Delta x, t) \cdot \cos(\theta + \Delta\theta) - T(x, t) \cdot \cos(\theta) = 0 \quad (1)$$

Se representarmos a componente horizontal da tensão por H , como na figura 13, então a equação (1) diz que H independe de x .

Por outro lado, a componente vertical obedece:

$$T(x + \Delta x, t) \text{sen}(\theta + \Delta\theta) - T(x, t) \text{sen}(\theta) = \rho \Delta x u_{tt}(\bar{x}, t) \quad (2)$$

onde \bar{x} é a coordenada do centro de massa do elemento da corda que está sendo analisado. Como é claro, \bar{x} está no intervalo $x < \bar{x} < x + \Delta x$. Devemos ainda

considerar que o peso da corda atuando na vertical para baixo seja desprezível e por isso não aparece na *equação (2)*.

Se a tensão for representada por sua componente vertical a *equação (2)* pode ser escrita como:

$$\frac{V(x + \Delta x, t) - V(x, t)}{\Delta x} = \rho u_{uu}(\bar{x}, t) \quad (3)$$

Passando o limite, com $\Delta x \rightarrow 0$ temos:

$$V_x(x, t) = \rho \cdot u_{tt} \quad (4)$$

Para que possamos escrever a equação inteiramente em termos de u , devemos observar que multiplicando o segundo membro da componente vertical ($V = T \cdot \text{sen}\theta$) por $\cos\theta / \cos\theta$, obtemos:

$$V(x, t) = H(t) \cdot \tan\theta = H(t) \cdot u_x(x, t) \quad (5)$$

Logo, a *equação (4)* fica da seguinte forma:

$$(H \cdot u_x)_x = \rho \cdot u_{tt} \quad (6)$$

mas, uma vez que H independe de x podemos escrever a *equação (6)* como sendo:

$$H \cdot u_{xx} = \rho \cdot u_{tt} \quad (7)$$

Para pequenos movimentos, é possível substituímos $H = T \cdot \cos\theta$ por T , para que assim, a *equação (7)* assumia sua forma usual:

$$a^2 \cdot u_{xx} = u_{tt} \quad (8)$$

onde:

$$a^2 = T/\rho \quad (9)$$

A equação (8) é a equação de onda do espaço unidimensional. Além disso, uma vez que T tem a dimensão de força e ρ a de massa por comprimento, temos que a constante 'a' tem a dimensão de velocidade. De acordo com a equação (9), a velocidade da onda é diretamente proporcional a tensão e inversamente com a densidade linear do material da corda.

10. 2. AS SÉRIES DE FOURIER

Para resolvermos um problema de valor de contorno como este, é necessário que consigamos exprimir uma função dada, definida em um intervalo $0 \leq x \leq L$ como uma série de senos e/ou co-senos. Principiamos por analisar séries um tanto mais gerais com a forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (1)$$

onde no conjunto de pontos em que a série da *equação (1)* for convergente, ela define uma função f cujo valor, em cada ponto é a soma da série para este valor de x . Neste caso ela é conhecida como Série de Fourier da função f . Precisamos determinar, a princípio, quais são as funções que podem ser representadas como a soma de uma Série de Fourier e achar um processo para calcular os coeficientes na série.

Além de sua associação ao método de separação de variáveis, as séries de Fourier têm várias outras utilidades como por exemplo na análise de sistemas mecânicos ou elétricos excitados por agentes externos periódicos.

10. 2. 1. PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES SENO E CO-SENO

Para discutirmos sobre as séries de Fourier, é necessário deduzirmos algumas propriedades das funções $\operatorname{sen}(m\pi x/L)$ e $\operatorname{cos}(m\pi x/L)$, onde m é um inteiro positivo:

- *Periodicidade*: uma função é dita periódica, com período $T > 0$, se e só se o domínio de f contiver $x + T$ sempre que x estiver nele contido e se

$$f(x+T) = f(x) \quad (2)$$

para qualquer valor de x . Devemos observar que se T for o período de uma função f , então todos os múltiplos de T também o serão e além disso temos que

o menor valor de T da função f representa o chamado *período fundamental*. Devemos observar que uma função constante, apesar de periódica, não possui o período fundamental.

- *Ortogonalidade*: a fim de descrevermos uma segunda propriedade, generalizamos o conceito de ortogonalidade de vetores. O *produto interno* padrão (u, v) de duas funções reais u e v no intervalo $\alpha \leq x \leq \beta$, definido por

$$(u, v) = \int_{\alpha}^{\beta} u(x)v(x)dx \quad (3)$$

são ortogonais neste intervalo se o respectivo produto interno for nulo, isto é

$$\int_{\alpha}^{\beta} u(x)v(x)dx = 0 \quad (4)$$

As funções $\text{sen}(m\pi x/L)$ e $\text{cos}(m\pi x/L)$, $m=1,2,\dots$, constituem um conjunto de funções mutuamente ortogonais, ou seja, todos os pares de funções do conjunto são ortogonais, no intervalo $-L \leq x \leq L$. Na realidade elas satisfazem às seguintes relações de ortogonalidade que podem ser facilmente comprovados por integração direta:

$$\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ L, & m = n \end{cases} \quad (5)$$

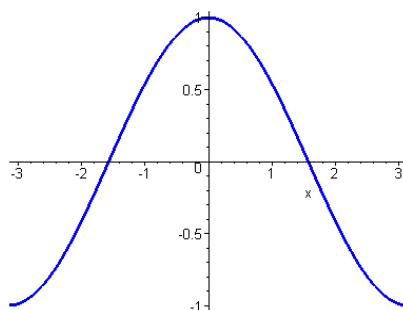
$$\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \text{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = 0, \text{ qualquer } m, n \quad (6)$$

$$\int_{-L}^L \text{sen} \frac{m\pi x}{L} \text{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ L, & m = n \end{cases} \quad (7)$$

10. 2. 2. FUNÇÕES PARES E ÍMPARES

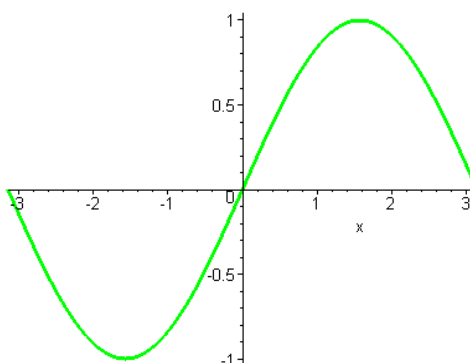
É útil ainda que distingamos duas importantes classes de funções onde as fórmulas de Euler-Fourier, a qual veremos em seguida, podem ser simplificadas: as funções pares e ímpares, as quais caracterizam-se geometricamente pelas propriedades de simetria em relação ao eixo y e em relação à origem respectivamente.

1. Uma função é *par* se o seu domínio contiver o ponto $-x$ sempre que o x estiver presente e se $f(x) = f(-x)$.



Figura(10.4): função co-seno, simétrica com relação ao eixo y

2. Uma função é *ímpar* se o seu domínio contiver o ponto $-x$ sempre que o x estiver presente e se $f(-x) = -f(x)$.



Figura(10.5): função seno, simétrica em relação à origem

Dentre as propriedades elementares das funções pares e ímpares, podemos citar:

- a soma/diferença e o produto/quociente de duas funções pares é uma função par;
- a soma/diferença de duas funções ímpares é ímpar e o produto/quociente de duas funções ímpares é par;
- a soma/diferença de uma função ímpar e uma função par, não é par nem ímpar; o produto/quociente de duas destas funções é ímpar.
- Se f for uma função par, então $\int_{-L}^L f(x)dx = 2\int_0^L f(x)dx$;
- Se f for uma função ímpar, então $\int_{-L}^L f(x)dx = 0$;

Estas funções são intuitivamente evidentes pela interpretação das áreas subentendidas pelas curvas e também decorrem imediatamente da definição.

10. 2 .3. AS FÓRMULAS DE EULER FOURIER

Suponhamos que a série da *equação (1)* da seção 10.2 seja convergente e sua soma seja $f(x)$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (8)$$

Os coeficientes a_n e b_n podem ser relacionados a $f(x)$ de maneira muito simples devido às condições de ortogonalidade determinadas nas *equações (3)* e *(4)* da seção 10.2.1., para isso, basta que multipliquemos os dois membros da *equação (8)* por $\cos(n\pi x/L)$, onde n é um inteiro fixo, e integremos termo a termos em relação a x no intervalo de $-L$ a L . Apesar de nem sempre ser possível integrarmos, termo a termo, uma série convergente com termos variáveis, o caso especial das Séries de Fourier sempre nos permite justificar tal integração. Logo a *equação (8)* pode ser escrita da seguinte forma

$$\int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad (9)$$

Como n é fixo e m cobre todo o domínio dos inteiros positivos, podemos deduzir das relações de ortogonalidade das *equações* (5), (6) e (7) da seção 10.2.1, que o único termo não-nulo no segundo membro da *equação* (9) é aquele onde $m = n$. Logo

$$\int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = L a_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Para determinarmos a_0 , podemos integrar a *equação* (8) de $-L$ a L e obter

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx \quad (11)$$

uma vez que todas as integrais que envolvem funções trigonométricas são nulas. Logo

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad (12)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots; \quad (13)$$

Estas últimas *equações* (12) e (13) são conhecidas como as fórmulas de Euler-Fourier para coeficientes de uma série de Fourier. Portanto se a *equação* (8) for convergente para $f(x)$, se a série puder ser integrada termo a termo, então os coeficientes devem ser dados pelas *equações* (12) e (13).

10.3. TEOREMA DE FOURIER

Vimos que se a série $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$ for convergente e definir uma função f , então a função é periódica com período $2L$ e os coeficientes a_m e b_m estão relacionadas a f pelas fórmulas de Euler-Fourier

$$a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx, \quad m = 0, 1, 2, \dots; \quad (1)$$

$$b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx, \quad m = 1, 2, \dots; \quad (2)$$

Agora, adotaremos uma postura um pouco diferente. Suponhamos que seja dada uma função f . Se esta for periódica, com período $2L$ e integrável no intervalo $[-L, L]$ então pode-se determinar um conjunto de coeficientes a_m e b_m pelas equações (1) e (2) e construir formalmente a série de Fourier. Ainda temos que saber se esta série é convergente para cada valor de x e se for, se sua soma é $f(x)$.

Para garantirmos a convergência da série de Fourier para uma dada função, com a qual calculamos seus coeficientes é essencial impormos condições que devem ser suficientemente gerais, para cobrir todas as situações de interesse, mas ao mesmo tempo devem ser suficientemente simples para que possam ser verificadas com cada função particular.

Antes de enunciarmos o teorema é necessário que saibamos que função f é seccionalmente dominante em um intervalo $a \leq x \leq b$ se o intervalo puder ser dividido por um número finito de pontos $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b$ de modo que:

1. f seja contínua em cada subintervalo aberto $x_{i-1} < x < x_i$;
2. f tende a um limite finito nas extremidades de cada subintervalo, quando estas extremidades forem aproximadas por dentro do intervalo.

Observemos ainda que não é essencial que f seja definida em x , assim como, que o intervalo seja fechado em pelo menos uma das extremidades.

Teorema 1: *Suponhamos f e f' sejam contínuas no intervalo $-L \leq x < L$. Além disso, suponhamos que f seja definida fora do intervalo $-L \leq x < L$, de modo a ser periódica com período $2L$. Então f tem a série de Fourier*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (3)$$

*cujos coeficientes são dados pelas equações de Euler-Fourier equações (2) e (3). A **série de Fourier** converge para $f(x)$ em todos os pontos onde f for contínua, e para $[f(x^+) + f(x^-)]/2$ em todos os pontos onde f for descontínua.*

10.4. UM PROBLEMA PARTICULAR

Queremos agora resolver a equação de onda, a qual foi um dos maiores problemas da matemática nos meados do século XVIII. A equação de onda foi deduzida e estudada, pela primeira vez por D'Alembert, em 1746, atraiu também a atenção de Euler em 1748, Daniel Bernoulli (1753) e de Lagrange (1759).

Para resolvermos tal problema, consideremos uma corda elástica de comprimento L , fortemente esticada entre dois suportes fixos, em um mesmo nível horizontal, de modo que o eixo x seja coincidente com a corda. Suponhamos que a corda seja movimentada, por exemplo, tangendo-a de modo que esta vibre num plano vertical e seja $u(x,t)$ o deslocamento vertical da corda no ponto x e instante t . Se forem desprezados os efeitos de amortecimento como por exemplo a resistência do ar, e se a amplitude não for muito grande, então $u(x,t)$ obedece à equação de onda

$$a^2 \cdot u_{xx} = u_{tt} \quad (1)$$

com $0 < x < L$, $t > 0$ e $a^2 = T/\rho$, onde T é a tensão e ρ é a massa por unidade de comprimento da corda.

Para que possamos resolver tal E.D.P. é preciso especificar apropriadamente as condições iniciais e de contorno para o deslocamento $u(x,t)$. Como as extremidades estão fixas, temos que as condições de contorno são:

$$u(0,t) = 0 \quad u(L,t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (2)$$

Uma vez que a equação diferencial (1) é de segunda ordem em relação a t , é razoável que se devam explicitar duas condições iniciais: posição inicial da corda

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (3)$$

e velocidade inicial

$$u_t(x,0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (4)$$

onde f e g são funções conhecidas. Afim de que as *equações* (2), (3) e (4) sejam coerentes, também é necessário que

$$f(0) = f(L) = 0, \quad g(0) = g(L) = 0. \quad (5)$$

Nosso problema resume-se em determinarmos a solução da *equação de onda* (1), de forma que esta satisfaça as *condições de contorno* (2) e *condições iniciais* (3) e (4). Como podemos perceber, este é um problema de valor inicial na variável tempo t , e um problema de valor de contorno na faixa semi-infinita do plano xt , $0 < x < L$, $t > 0$. Além disso, temos uma condição imposta em cada ponto dos lados da faixa semi-infinita, e duas estão impostas em cada ponto da base finita.

Veamos agora, com resolver alguns problemas típicos de valor de contorno com uma equação de onda unidimensional.

10.5. CORDA ELÁSTICA COM DESLOCAMENTO INICIAL NÃO NULO

Suponhamos que a corda seja perturbada da sua posição de equilíbrio e depois libertada com velocidade nula no instante $t = 0$, a fim de vibrar livremente. Assim, o deslocamento vertical $u(x,t)$ deve obedecer a *equação de onda (1)*, as *condições de contorno (2)* da seção 10.4 e as *condições iniciais*

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L; \quad (1)$$

onde f é uma função dada que descreve a configuração da corda em $t=0$.

Para conseguirmos a solução das *equações (1), (2)* da seção 10.4 e (1) desta, podemos utilizar o método de separação de variáveis. Com a hipótese

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t); \quad (2)$$

com a substituição de u na *equação (1)* da seção 10.4 temos

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2} \frac{T''}{T} = -\sigma; \quad (3)$$

onde $-\sigma$ é uma constante uma vez que variando x o segundo membro permanece constante e vice-versa. Encontramos assim que $X(x)$ e $T(t)$ devem obedecer às equações diferenciais ordinárias

$$X'' + \sigma \cdot X = 0; \quad (4)$$

$$T'' + a^2 \cdot \sigma \cdot T = 0; \quad (5)$$

Precisamos determinar agora, quais são os possíveis valores da constante σ pelas condições de contorno. Com a substituição de $u(x,t)$, da *equação (2)*, nas *condições de contorno (2)* da seção 10.4, temos que

$$\begin{cases} u(0,t) = X(0) \cdot T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0 \\ u(L,t) = X(L) \cdot T(t) = 0 \Rightarrow X(L) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

uma vez que $T(t) \neq 0$.

Para que possamos resolver o problema da *equação diferencial (4)*, sujeita às *condições de contorno (2)* da seção 10.4, precisamos determinar σ e para verificar se existem soluções *não triviais* devemos estudar os casos onde $\sigma > 0$, $\sigma < 0$ e $\sigma = 0$:

- **$\sigma = 0$:**

Como é uma EDO de segunda ordem temos que se $\sigma = 0$, a solução deverá ser linear da forma:

$$X(x) = k_1 \cdot x + k_2 \quad (7)$$

A fim de satisfazer a *1ª condição de contorno (6)*, devemos ter $k_2 = 0$. Sendo $k_2 = 0$ e a fim de satisfazer *2ª condição de contorno (6)*, devemos ter $k_1 = 0$.

Logo $X(x) = 0$; $\forall x$; portanto existem apenas soluções triviais para $\sigma = 0$.

- **$\sigma < 0$:**

Para evitarmos o aparecimento de sinais nas raízes no raciocínio que se segue, é conveniente substituímos σ por $-\lambda^2$, onde $\lambda > 0$ é um novo parâmetro.

Procuramos solução do tipo $X(x) = e^{rx}$ para a *equação (4)*, logo, derivando $X(x)$ e substituindo na *equação (4)*, obtemos:

$$r^2 e^{rx} - \lambda^2 e^{rx} = 0 \Rightarrow r = \pm \lambda \quad (8)$$

logo temos que as soluções do problema serão:

$$X_1 = (e^{\lambda x} + e^{-\lambda x})/2 = \cosh \lambda x \text{ e } X_2 = (e^{\lambda x} - e^{-\lambda x})/2 = \sinh \lambda x \quad (9)$$

fazendo uma combinação linear das soluções encontradas temos que

$$X(x) = c_1 \cosh \lambda x + c_2 \sinh \lambda x \quad (10)$$

Aplicando a 1ª condição de contorno obtemos que $c_1 = 0$; segue então que $X(x) = c_2 \sinh \lambda x$. Com a 2ª condição de contorno obtemos que $X(L) = c_2 \sinh \lambda L = 0$, mas como λ e L são positivos, $\sinh \lambda L > 0$ então $c_2 = 0$.

- $\sigma > 0$:

$$\sigma = n^2 \pi^2 / L^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (11)$$

e as soluções correspondentes para $X(x)$ são proporcionais a $\sin(n\pi x/L)$. Com os valores de σ , dados pela equação (11), na equação (5), temos que $T(t)$ é uma combinação linear de $\sin(nat\pi/L)$ e $\cos(nat\pi/L)$. Então, funções com a forma

$$u_n(x, t) = \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi at}{L}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (12)$$

$$v_n(x, t) = \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi at}{L}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (13)$$

satisfazem à equação diferencial parcial (1) e também às condições de contorno (2), ambas da seção 10.4. Estas funções são soluções fundamentais do problema dado.

Vamos agora procurar a superposição das soluções fundamentais (12) e (13) que também satisfaz às condições iniciais (1). Admitamos que $u(x, t)$ seja dado por

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} [c_n u_n(x, t) + k_n v_n(x, t)] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{L} \left(c_n \sin \frac{n\pi at}{L} + k_n \cos \frac{n\pi at}{L} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

onde c_n e k_n são constantes a serem determinadas pelas condições iniciais.

Aplicando a condição inicial $u(x,0) = f(x)$ temos:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = f(x) \quad (15)$$

Logo temos que os k_n devem ser os coeficientes de uma série de Fourier para f , com período $2L$, e são dados por

$$k_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (16)$$

Admitamos agora que a *série* (14) possa ser derivada termo a termo em relação à t . A condição inicial $u_t(x,t) = 0$ nos dá

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{n\pi a}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = 0, \quad (17)$$

Portanto, os coeficientes $c_n(n\pi a/L)$ devem ser os coeficientes de uma série de Fourier de uma função que é identicamente nula, com o período $2L$. Pelas formulas de Euler-Fourier, vem que $c_n = 0$, para qualquer n . Então, a solução do problema das equações (1), (2) da seção 10.4 e (1) desta, é

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi at}{L}, \quad (18)$$

com os coeficientes k_n dados pela equação (16).

10.6. JUSTIFICATIVA DA SOLUÇÃO

Esta é apenas uma solução formal das *equações (1), (2)* da seção 10.4 e *(1)* da seção 10.5. A fim de termos certeza de que a *equação (18)* da seção 10.5 pode representar realmente a solução do problema da condução de calor, é tentador mostrar a correção da solução pela substituição direta de $u(x,t)$ dada pela *equação (18)* da seção 10.5 nas *equações (1),(2)* da seção 10.4 e *(1)* da seção 10.5. No entanto, ao fazermos o cálculo formal de u_{xx} , por exemplo, obtemos

$$u_{xx}(x,t) = - \sum_{n=1}^{\infty} k_n \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi at}{L}; \quad (1)$$

o que em virtude do n^2 no numerador da série pode não ser convergente. Isto não significa necessariamente, que a *série (18)* da seção 10.5 para $u(x,t)$ seja incorreta, mas apenas que ela não pode ser usada para calcular u_{xx} e u_{tt} . Mas, nas equações de onda, as soluções em séries da equação de onda só contêm termos oscilatórios que não decaem quando n aumenta.

Há, no entanto, uma outra forma de estabelecermos a validade da *equação (18)* da seção 10.5 de maneira indireta. O que nos permitirá, também, conseguir informações adicionais sobre a estrutura da solução. Inicialmente, mostremos que a *equação (18)* é equivalente a

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[h(x-at)+h(x+at)] \quad (2)$$

onde h é a função que se obtém estendendo-se os dados iniciais f no intervalo $(-L,0)$, como uma função ímpar, e aos outros valores de x como função periódica de período $2L$. Isto é

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \leq x \leq L; \\ -f(-x); & -L < x < 0; \end{cases} \quad (3)$$

A fim de demonstrar a *equação (2)*, observamos que h tem a série de Fourier

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}. \quad (4)$$

Então, com as identidades trigonométricas para o seno da soma, ou da diferença, de dois argumentos, obtermos

$$h(x - at) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \left(\operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi at}{L} - \cos \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi at}{L} \right); \quad (5)$$

$$h(x + at) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \left(\operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi at}{L} + \cos \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi at}{L} \right); \quad (6)$$

e consegue-se imediatamente a *equação (2)*, pela soma das duas últimas equações.

10.7. PROBLEMA GERAL DA CORDA ELÁSTICA

Suponhamos que a corda seja excitada a partir de uma posição inicial especificada, com uma velocidade dada. Então, o deslocamento vertical $u(x,t)$ deve obedecer à *equação de onda (1)* da seção 10.4.

$$a^2 \cdot u_{xx} = u_{tt}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0;$$

às *condições de contorno (2)* da seção 10.4,

$$u(0,t) = 0 \quad u(L,t) = 0, \quad t \geq 0;$$

e as *condições iniciais (3) e (4)* da seção 10.4 respectivamente

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L$$

onde f e g são funções dadas que definem a posição inicial e a velocidade inicial da corda, respectivamente.

Lembremos que as soluções fundamentais dadas pelas *equações (12) e (13)* da seção 10.5, obedecem à *equação diferencial (1)* e às *condições de contorno (2)* e vamos admitir que $u(x,t)$ seja dada, também pela *equação (14)*, ambas da seção 10.4. Os coeficientes c_n e k_n devem agora ser determinados pelas *condições iniciais (3) e (4)* da seção 10.5. Aplicando a condição $u(x,0) = f(x)$ conseguimos

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = f(x) \quad (1)$$

Portanto, os coeficientes k_n são outra vez coeficientes de uma série de Fourier para f , com período $2L$, e exprime-se pela *equação (16)* da seção 10.5.

$$k_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Derivando a *equação (14)* da seção 10.5 em relação a t e aplicando a segunda condição inicial $u_t(x,0) = g(x)$ nos dá

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{L} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = g(x) \quad (2)$$

Portanto os coeficientes $(n\pi a/L)c_n$ são os coeficientes da série de senos de Fourier para g , com período $2L$; logo

$$\frac{n\pi a}{L} c_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Desta forma, a *equação (14)* com os coeficientes dados pelas *equações (16)* e *(17)* da seção 10.5, constitui uma solução formal do problema das *equações (1), (2), (3)* e *(4)* da seção 10.4. A validade da solução formal pode ser estabelecida mediante argumentos semelhantes aos que foram indicados, em passagem anterior, para a resolução das *equações (1), (2)* da seção 10.4 e *(1)* da seção 10.5.

CAPÍTULO 11: ANALISANDO O SOM EM UMA MEMBRANA ELÁSTICA

Estamos interessados em estender o método de separação de variáveis, desenvolvido anteriormente em uma corda elástica, à uma classe mais ampla de problemas, os seja, problemas que envolvem equações diferenciais mais gerais, com condições de contorno mais gerais ou regiões geométricas diferentes. Neste capítulo veremos um exemplo que envolve o desenvolvimento de uma equação de onda bidimensional em uma série de funções de Bessel; embora antes tenhamos que lembrar alguns pontos importantes para solucionar a mesma.

11.1 – EQUAÇÕES DE BESSEL DE ORDEM ZERO

Consideremos um dos casos especiais da equação de Bessel

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - v^2)y = 0 \quad (1)$$

onde v é uma constante. É fácil mostrar que $x = 0$ é um ponto singular regular. Para ter simplicidade, vamos analisar somente o caso $x > 0$.

Em uma equação de Bessel de ordem zero, podemos ilustrar a situação onde as raízes da equação inicial são iguais. Fazendo $v = 0$ na equação (1) obtemos

$$L[y] = x^2 y'' + x y' + (x^2 - v^2)y = 0 \quad (2)$$

Admitindo

$$y = \phi(r, x) = a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{r+n}, \quad (3)$$

obtemos

$$\begin{aligned}
L[\phi](r, x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n [(r+n)(r+n-1) + (r+n)] x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+2} \\
&= a_0 [r(r-1) + r] x^r + a_1 [(r+1)r + (r+1)] x^{r+1} \\
&+ \sum \{ a_n [(r+n)(r+n-1) + (r+n)] + a_{n-2} \} x^{r+n} = 0 \quad (4)
\end{aligned}$$

As raízes da equação inicial $F(r) = r(r-1) + r = 0$ são $r_1 = 0$ e $r_2 = 0$, então temos o caso de raízes iguais. A relação de recorrência é

$$a_n(r) = \frac{a_{n-2}(r)}{(r+n)(r+n-1) + (r+n)} = -\frac{a_{n-2}(r)}{(r+n)^2}, \quad n \geq 2 \quad (5)$$

A fim de encontrarmos $y(x)$, devemos fazer $r = 0$, logo, pela equação (4) temos que para o coeficiente de x^{r+1} se nulo devemos escolher $a_1 = 0$. Então, pela equação (5), $a_3 = a_5 = a_7 = \dots = 0$. Além disso

$$a_n(0) = -\frac{a_{n-2}(0)}{n^2}, \quad n = 2, 4, 6, 8, \dots \quad (6)$$

ou fazendo $n = 2m$, temos

$$a_{2m}(0) = -\frac{a_{2m-2}(0)}{(2m)^2}, \quad m = 1, 3, 5, 7, \dots \quad (7)$$

Assim,

$$a_2(0) = -\frac{a_0}{2^2}, \quad a_4(0) = -\frac{a_0}{2^4 2^2}, \quad a_6(0) = -\frac{a_0}{2^6 (3 \cdot 2)^2},$$

e em geral

$$a_{2m}(0) = \frac{(-1)^m a_0}{2^m (m!)^2}, \quad m = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (6)$$

Portanto

$$y_1(x) = a_0 \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m} (m!)^2} \right], \quad x > 0 \quad (7)$$

onde a função entre colchetes é a função de Bessel de primeira espécie e de ordem zero, e simboliza-se por $J_0(x)$. Esta série é convergente para todo x e J_0 é analítico em $x = 0$.

11.2 – PROBLEMAS DE VALOR DE CONTORNO HOMOGÊNEOS E LINEARES: AUTOVALORES E AUTOFUNÇÕES

Considerando o problema de valor de contorno constituído pela equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad 0 < x < 1 \quad (1)$$

e as condições de contorno

$$a_1 y(0) + a_2 y'(0) = 0 \quad \text{e} \quad b_1 y(1) + b_2 y'(1) = 0 \quad (2)$$

temos que este é um problema de valor inicial que tem solução única em qualquer intervalo nas proximidades do ponto inicial, no qual as funções p e q seja contínuas. Não se pode fazer uma afirmação tão abrangente a propósito do problema de valor de contorno (1) e (2). Em primeiro lugar, todos os problemas homogêneos têm a solução $y = 0$. Esta solução trivial não tem, em geral, interesse e a questão importante é saber se existem ou não soluções não triviais. Com a hipótese de $y = \phi(x)$ ser uma destas soluções, vem da natureza homogênea e linear do problema, que $y = k\phi(x)$ também é solução para qualquer valor da constante k . Assim, correspondendo a uma solução não trivial ϕ há uma família infinita de soluções não triviais. Nos problemas de valor de contorno de segunda ordem, mais gerais, porém, podem existir duas famílias de soluções, correspondendo a duas soluções linearmente independentes ϕ_1 e ϕ_2 .

Consideremos a equação diferencial

$$y'' + p(x,\lambda)y' + q(x,\lambda)y = 0, \quad 0 < x < 1 \quad (3)$$

cujos coeficientes dependem de um parâmetro λ , com as condições de contorno (2). Para quais valores de λ , se existem estes valores, o problema de valor de contorno tem soluções não triviais? Admitamos que as funções p e q sejam contínuas em $0 \leq x \leq 1$, e para todos os valores de λ .

A solução geral da equação (3) deve depender de x e de λ , e podemos escrever

$$y = c_1 y_1(x, \lambda) + c_2 y_2(x, \lambda) \quad (4)$$

onde y_1 e y_2 constituem um conjunto fundamental de soluções da equação (3). Os valores para o qual λ apresenta solução não trivial são chamados autovalores. Se substituirmos y nas condições de contorno (2) obtemos as equações

$$\begin{aligned} c_1[a_1 y_1(0, \lambda) + a_2 y_1'(0, \lambda)] + c_2[a_1 y_2(0, \lambda) + a_2 y_2'(0, \lambda)] &= 0 \\ c_1[b_1 y_1(1, \lambda) + b_2 y_1'(1, \lambda)] + c_2[b_1 y_2(1, \lambda) + b_2 y_2'(1, \lambda)] &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

em c_1 e c_2 . Este sistema de equações linear homogêneo terá soluções não triviais se e somente se o determinante dos coeficientes $D(\lambda)$ for nulo, ou seja

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_1 y_1(0, \lambda) + a_2 y_1'(0, \lambda) & a_1 y_2(0, \lambda) + a_2 y_2'(0, \lambda) \\ b_1 y_1(1, \lambda) + b_2 y_1'(1, \lambda) & b_1 y_2(1, \lambda) + b_2 y_2'(1, \lambda) \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

Os valores de λ que formam as raízes desta equação são os autovalores do problema de valor de contorno (3) e (2), se estes existirem. A cada autovalor há pelo menos uma solução não trivial, uma autofunção que é determinada a menos de uma constante multiplicativa arbitrária.

Em virtude da forma arbitrária na qual λ aparece na equação diferencial (3), é difícil afirmar outras coisas sobre os autovalores e as autofunções do problema de valor de contorno (3), (2). Vamos nos limitar a problemas nos quais o coeficiente p na equação (3) é independente de λ e o coeficiente q é uma função linear de λ .

11.3 – PROBLEMAS DE VALOR DE CONTORNO DE STURN-LIOUVILLE

Os Problemas de Valor de Contorno de Sturm-Liouville são constituídos pela equação diferencial da forma

$$[p(x)y']' - q(x)y + \lambda r(x)y = 0 \quad (1)$$

e as condições de contorno

$$a_1 y(0) + a_2 y'(0) = 0 \quad \text{e} \quad b_1 y(1) + b_2 y'(1) = 0 \quad (2)$$

Utilizando o operador linear

$$L[y] = -[p(x)y']' - q(x)y \quad (3)$$

na equação (1), obtemos

$$L[y] = \lambda r(x)y \quad (4)$$

admitindo p , q e r contínuas no intervalo $0 \leq x \leq 1$.

Deduzindo a identidade de Lagrange para duas funções u e v com as derivadas contínuas no intervalo $0 \leq x \leq 1$ obtemos

$$\int_0^1 L[y]v dx = \int_0^1 [-p(u)']' v dx + \int_0^1 q u v dx \quad (5)$$

$$= \underbrace{\int_0^1 -(pu)']' v dx}_I + \int_0^1 q u v dx$$

integrando I por partes duas vezes obtemos

$$\begin{aligned}
&= -(pu'v|_0^l - \int_0^l pu'v' dx) = -(pu'v|_0^l - [pv'u|_0^l - \int_0^l u(pv')' dx]) \\
&= -pu'v|_0^l + puv'|_0^l + \int_0^l -(pv')' u dx + \int_0^l quv dx \\
&= -pu'v|_0^l + puv'|_0^l + \int_0^l [(pv')' u + qvu] dx \\
&= -pu'v|_0^l + puv'|_0^l + \int_0^l L[v] u dx = -p[u'v - uv']|_0^l + \int_0^l L[v] u dx
\end{aligned}$$

logo

$$\int_0^l L[u] v dx + \int_0^l L[v] u dx = -p[u'v - uv']|_0^l \quad \text{Identidade de Lagrange} \quad (6)$$

Supondo que as funções u e v da equação (6) satisfaçam as condições de contorno e admitimos que $a_2 \neq 0$ e $b_2 \neq 0$. Resolvendo o segundo membro de (6) e substituindo nas condições de contorno obtemos:

$$\begin{aligned}
&= p(1) [u'(1)v(1) - u(1)v'(1)] + p(0)[u'(0)v(0) - u(0)v'(0)] \\
&= p(1) [-b_1/b_2 u(1)v(1) + b_1/b_2 u(1)v(1)] \\
&+ p(0)[-a_1/a_2 u'(0)v(0) + a_1/a_2 u(0)v'(0)] = 0
\end{aligned}$$

logo

$$\int_0^l L[u] v dx + \int_0^l L[v] u dx = 0 \quad (7)$$

Podemos definir o produto interno (u,v) de duas funções reais u e v , numa dada integral definida para $0 \leq x \leq 1$

$$\int_0^l u(x)v(x)dx \quad (8)$$

como sendo

$$(L[u],v) - (u,L[v]) = 0 \quad (9)$$

Suponhamos que dada uma função f , que obedece as condições apropriadas, possa ser desenvolvida numa série infinita de autofunções do problema de Sturm-Liouville mais geral (1) e (2). Se isto puder ser feito, teremos então

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) \quad (10)$$

onde $\phi_n(x)$ satisfaz às equações (1) e (2) e também as condições de ortogonalidade definidas por

$$\int_0^l r(x)\phi_m(x)\phi_n(x)dx = \delta_{mn} \quad (11)$$

onde δ_{mn} é conhecido como delta de Kronecker e é definido por

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ 1 & \text{se } m = n \end{cases} \quad (12)$$

Para calcular os coeficientes c_n na série (10), multiplicamos a equação (10) por $r(x)\phi_m(x)dx$ e integramos de $x = 0$ à $x = 1$. Admitindo que a série possa ser integrada termo a termo, obtemos:

$$\int_0^l r(x)f(x)\phi_m(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_0^l r(x)\phi_m(x)\phi_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \delta_{mn} \quad (13)$$

Portanto, com a definição de δ_{mn} ,

$$c_m = \int_0^l r(x) f(x) \phi_m(x) dx = (f, r\phi_m), \quad m = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Os coeficientes na série (10) forma formalmente determinados. A equação (14) tem a mesma estrutura das fórmulas de Euler-Fourier para os coeficientes de uma série de Fourier, e a série de autofunções (10) tem propriedades de convergência semelhantes às séries de Fourier.

A partir deste momento apenas enunciaremos alguns importantes Teoremas que garantem a resolução do problema que será investigado:

TEOREMA 11.1: Todos os autovalores do problema de Sturm-Liouville (1) e (2) são reais.

TEOREMA 11.2: Se ϕ_1 e ϕ_2 forem duas autofunções do problema de Sturm-Liouville (1) e (2), correspondentes, respectivamente, aos autovalores λ_1 e λ_2 , e se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então

$$\int_0^l r(x) \phi_1(x) \phi_2(x) dx = 0$$

TEOREMA 11.3: Os autovalores do problema de Sturm-Liouville (1) e (2) são todos simples, isto é, cada autovalor corresponde somente a uma autofunção independente. Além disso, os autovalores constituem uma seqüência infinita que pode ser ordenada crescentemente, de modo que

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_n < \dots$$

Ainda mais, $\lambda_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$.

TEOREMA 11.4: Sejam $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \dots$ as autofunções normalizadas do problema de Sturm-Liouville (1) e (2). Sejam f e f' seccionalmente contínuas em $0 \leq x \leq 1$. Então a série (10), cujos coeficientes c_m são dados pela equação (14), converge para $[f(x+) + f(x-)]/2$ em cada ponto do intervalo aberto $0 < x < 1$.

11.4 - PROBLEMAS DE STURN-LIOUVILLE SINGULARES

Admitindo que para um problema regular de valor de contorno Sturn-Liouville, a equação diferencial é da forma

$$L[y] = - [p(x)y']' + q(x)y = \lambda r(x)y, \quad 0 < x < 1 \quad (1)$$

e as condições de contorno são dadas por

$$a_1y(0) + a_2y'(0) = 0 \quad (2)$$

$$b_1y(1) + b_2y'(1) = 0 \quad (3)$$

onde p é uma função derivável, q e r são contínuas e $p(x) > 0$ e $r(x) > 0$ para todos os pontos de intervalo fechado.

No entanto, existem também as equações de interesse físico nas quais algumas destas condições não estão cumpridas. Por exemplo, suponhamos que queremos investigar a equação de Bessel de ordem ν no intervalo $0 < x < 1$. Esta equação se escreve, às vezes, na forma

$$-(xy')' + \frac{\nu^2}{x}y = \lambda xy \quad (4)$$

onde $p(x) = x$, $q(x) = \nu^2/x$ e $r(x) = x$. Assim, $p(0) = 0$, $r(0) = 0$ e $q(x)$ é limitada, e portanto descontínua, quando $x \rightarrow 0$. No entanto, as condições impostas aos problemas de Sturn-Liouville regulares são cumpridas em todos os outros pontos de intervalo.

Analogamente, com a equação de Legendre temos

$$-[(1-x^2)y']' = \lambda y, \quad -1 < x < 1 \quad (5)$$

onde $\lambda = \alpha(\alpha+1)$, $p(x) = 1 - x^2$, $q(x) = 0$ e $r(x) = 1$. Neste caso, as condições mencionadas sobre p , q e r são cumpridas no intervalo $0 \leq x \leq 1$, exceto em $x = 1$, onde p é nula. Identificamos como problema de Sturm-Liouville singular o de uma certa classe de problemas de valor de contorno da equação diferencial (1), na qual as funções p , q e r obedecem às condições que já foram explicitadas no intervalo $0 < x < 1$, onde pelo menos uma delas deixa de ser cumprida em um dos pontos da fronteira, ou ambos. Além disso, impomos condições de contorno convenientes, separadas, de uma espécie a ser descrita pormenorizadamente um pouco adiante. Apesar de ocorrerem problemas singulares quando o intervalo básico for ilimitado, por exemplo $0 \leq x < \infty$, estes não serão considerados.

Como exemplo de um problema singular sobre um intervalo finito, consideremos a equação

$$x y'' + y' + \lambda xy = 0, \quad (6)$$

ou

$$-(x y')' = \lambda x y, \quad (7)$$

no intervalo $0 < x < 1$, e suponhamos que $\lambda > 0$. Esta equação aparece na investigação das vibrações livres em uma membrana circular elástica, e será discutida posteriormente. Se introduzirmos a variável independente t , definida por $t = \sqrt{\lambda} x$, então

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\lambda} \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \lambda \frac{d^2 y}{dt^2}.$$

Portanto, a equação (6) fica

$$\frac{t}{\sqrt{\lambda}} \lambda \frac{d^2 y}{dt^2} + \sqrt{\lambda} \frac{dy}{dt} + \lambda \frac{t}{\sqrt{\lambda}} y = 0$$

ou, cancelando-se o fator comum $\sqrt{\lambda}$ em cada parcela,

$$t \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + ty = 0 \quad (8)$$

A equação (8) é uma equação de Bessel de ordem zero. A solução geral para esta equação, para $t > 0$, é

$$y = c_1 J_0(t) + c_2 Y_0(t)$$

e portanto, a solução geral da equação (7), para $x > 0$ é

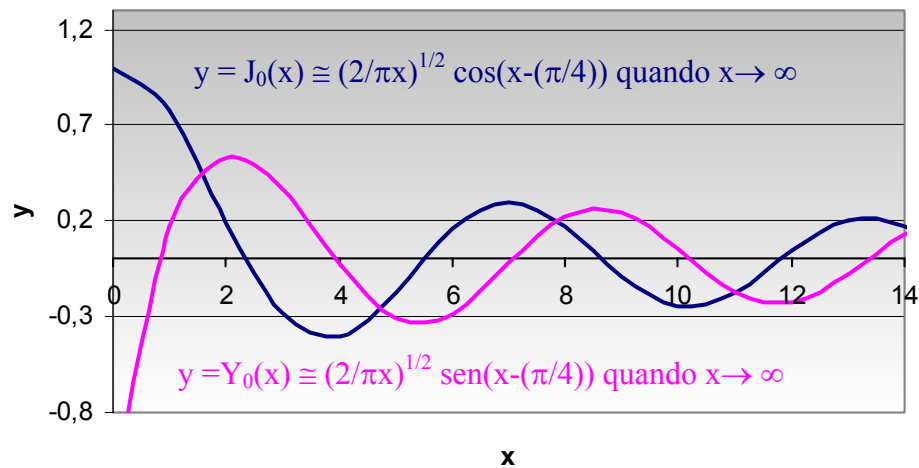
$$y = c_1 J_0(\sqrt{\lambda}x) + c_2 Y_0(\sqrt{\lambda}x),$$

onde J_0 e Y_0 simbolizam as funções de Bessel de primeira espécie e de segunda espécie, ambas de ordem zero. Pelas equações (7) e (13) da seção anterior, temos:

$$J_0(\sqrt{\lambda}x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \lambda^m x^{2m}}{2^{2m} (m!)^2}, \quad x > 0, \quad (10)$$

$$Y_0(\sqrt{\lambda}x) = \frac{2}{\pi} \left[\left(\gamma + \ln \frac{\sqrt{\lambda}x}{2} \right) J_0(\sqrt{\lambda}x) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} H_m \lambda^m x^{2m}}{2^{2m} (m!)^2} \right], \quad x > 0, \quad (11)$$

onde $H_m = 1 + (1/2) + \dots + (1/m)$; e $\gamma = \lim_{m \rightarrow \infty} (H_m - \ln m)$. Os gráficos de $y = J_0(x)$ e de $y = Y_0(x)$ aparecem na *figura (51)*.



Figura(11.1): Funções de Bessel de ordem zero

Suponhamos que buscamos uma solução da equação (5) que também satisfaça às condições de contorno

$$y(0) = 0 \quad (12)$$

$$y(1) = 0 \quad (13)$$

que são típicas das que encontramos em outros problemas deste capítulo. Uma vez que $J_0(0) = 1$ e $Y_0(x) \rightarrow -\infty$ quando $x \rightarrow 0$, a condição $y(0) = 0$ só pode ser cumprida fazendo-se $c_1 = c_2 = 0$ na equação (9). Assim, o problema de valor de contorno (7), (12), (13) só tem a solução trivial.

Uma interpretação deste resultado é que a condição de contorno (12) em $x = 0$ é muito restritiva para a equação diferencial (7). Isto ilustra a situação geral, ou seja, em um ponto singular da fronteira é necessário considerar um tipo modificado da condição de contorno. No problema que estamos vendo, suponhamos que exigimos somente que a solução (9) e sua derivada permaneçam limitadas. Em outras palavras, tomamos como condição de contorno em $x = 0$ a exigência

$$y, y' \text{ limitadas quando } x \rightarrow 0$$

Esta condição pode ser cumprida fazendo-se $c_2 = 0$ a fim de eliminar a solução ilimitada Y_0 . A segunda condição ed contorno $y(1) = 0$ dá então

$$J_0(\sqrt{\lambda}) = 0 \quad (15)$$

É possível mostrar que a equação (15) tem um conjunto infinito de raízes positivas discretas, que levam aos autovalores $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$ do problema proposto. As autofunções correspondentes são

$$\phi_n(x) = J_0(\sqrt{\lambda_n}x) \quad (16)$$

determinadas a menos de uma constante multiplicativa. O problema de valor de contorno (7), (13) e (14) é um exemplo de um problema de Sturm-Liouville singular. Este exemplo ilustra que se as condições de contorno forem mais elásticas, de maneira conveniente, um problema de Sturm-Liouville regular.

Em virtude da importância que assumem nas aplicações, vale a pena investigar um tanto mais os problemas de valor de contorno singulares. Há duas questões principais que são importantes.

1. que tipo de condições podem ser admitidas, precisamente, num problema de Sturm-Liouville singular?
2. Em que medida os autovalores e as autofunções de um problema singular compartilham as propriedades dos autovalores e das autofunções de problemas de Sturm-Liouville regulares? Em particular, os autovalores são reais? As autofunções são ortogonais? Uma dada função pode ser desenvolvida em uma série destas autofunções?

Estas perguntas podem ser respondidas pela investigação da identidade

$$\int_0^l \{L[u]v - uL[v]\}dx = 0 \quad (17)$$

Investiguemos agora as condições na qual a relação é válida para os problemas singulares, quando então a integral da equação (17) deva ser examinada como uma integral imprópria. Devido à clareza, podemos considerar a equação diferencial (1) e admitirmos que $x = 0$ seja um ponto singular da fronteira, mas que $x = 1$ seja um ponto regular. A condição de contorno (3) está imposta no ponto da fronteira que não é singular, $x = 1$, mas deixamos ainda sem especificação a condição de contorno em $x = 0$. Queremos na verdade determinar quais são as espécies de condições de contorno que são admissíveis em um ponto singular da fronteira, a fim de que a equação (14) seja válida.

Como o problema de valor de contorno que estamos examinado é singular em $x = 0$, escolhemos $\epsilon > 0$ e consideramos a integral $\int_{\epsilon}^1 L[u]v dx$ em lugar de $\int_0^1 L[u]v dx$, e depois faremos ϵ tender a zero. Admitimos ainda que u e v tenham pelo menos duas derivadas contínuas $\epsilon \leq x \leq 1$, e integrando duas vezes por partes obtemos

$$\int_{\epsilon}^1 \{L[u]v - uL[v]\} dx = -p(x)[u'(x)v(x) - u(x)v'(x)] \Big|_{\epsilon}^1 \quad (18)$$

onde o termo geral correspondente à fronteira $x = 1$ está eliminado se u e v satisfizerem às condições de contorno (3) levando-nos a obtenção de

$$\int_{\epsilon}^1 \{L[u]v - uL[v]\} dx = p(\epsilon)[u'(\epsilon)v(\epsilon) - u(\epsilon)v'(\epsilon)] \quad (19)$$

onde passamos o limite com $\epsilon \rightarrow 0$, obtemos

$$\int_0^1 \{L[u]v - uL[v]\} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} p(\epsilon)[u'(\epsilon)v(\epsilon) - u(\epsilon)v'(\epsilon)] \quad (20)$$

logo, temos que a equação (17) vale se e somente se, além das hipóteses enunciadas, tivermos que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} p(\epsilon)[u'(\epsilon)v(\epsilon) - u(\epsilon)v'(\epsilon)] = 0 \quad (21)$$

para cada par de funções u e v na classe que estamos considerando. A equação (21) é o critério que determina quais as condições de contorno admissíveis em $x = 0$, quando este for um ponto singular da fronteira. De maneira semelhante podemos pensar na condição que se aplica em $x = 1$, se este ponto da fronteira for singular, ou seja,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} p(1-\epsilon)[u'(1-\epsilon)v(1-\epsilon) - u(1-\epsilon)v'(1-\epsilon)] = 0 \quad (22)$$

Logo temos que um problema de valor de contorno singular com a equação (1) é auto-ajunto se a equação (7) for válida, possivelmente com a integral imprópria, para cada par de funções u e v com as seguintes propriedades: as funções são contínuas, com as derivadas segundas contínuas no intervalo aberto $0 < x < 1$, obedecem a uma condição de contorno com a forma (2) em cada ponto regular da fronteira e cumprem uma condição de contorno suficiente para assegurar a equação (21), se $x = 0$ for um ponto de fronteira, ou a equação (22), se $x = 1$ for um ponto singular da fronteira. Se pelo menos um ponto da fronteira for singular, então a equação diferencial (1), com as duas condições de contorno do tipo que acabamos de descrever, constitui um problema de Sturm-Liouville singular.

11.5: VIBRAÇÕES DE UMA MEMBRANA ELÁSTICA

Quando trabalhamos com as vibrações em uma corda elástica foi possível observar que era possível expandir a equação segundo a dimensão a que este pertencesse. Desta forma temos que em uma membrana elástica as vibrações transversais que governam a onda bidimensional são dadas por

$$a^2(u_{xx} + u_{yy}) = u_{tt} \quad (1)$$

Para melhor investigarmos sobre o movimento de uma membrana circular, é conveniente escrever a equação (1) em coordenadas polares.

$$a^2\left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}\right) = u_{tt} \quad (2)$$

Admitamos que a membrana tenha raio unitário e que está fixada rigidamente pela respectiva circunferência e que inicialmente não ocupa posição de equilíbrio no instante em que a membrana é libertada ($t=0$), posição esta que é independente da variável angular θ . Devido à simetria circular, as condições iniciais e de contorno, é natural admitir que u seja independente de θ ; isto é, que u seja função exclusiva de r e t . Deste modo temos que a equação (2) fica

$$a^2\left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\right) = u_{tt}, \quad 0 < r < 1 \quad t > 0 \quad (3)$$

a condição de contorno em $r=1$ é

$$u(1,t) = 0 \quad t \geq 0 \quad (4)$$

e as condições iniciais são

$$\begin{aligned} u(r,0) &= f(r), & 0 \leq r \leq 1 \\ u_t(r,0) &= 0, & 0 \leq r \leq 1 \end{aligned} \quad (5)$$

onde $f(r)$ descreve a configuração inicial da membrana. Vamos admitir também, para manter coerência que $f(1)=0$ e que $u(r,t)$ seja limitada em $0 \leq r \leq 1$.

Com a hipótese $u(r,t) = R(r).T(t)$, a substituição de $u(r,t)$ na equação (3) resulta em

$$\frac{R'' + \left(\frac{1}{r}\right)R'}{R} = \frac{1}{a^2} \frac{T''}{T} = \sigma \quad (6)$$

Como vimos, no caso da corda elástica, a equação só apresenta solução não-trivial se, cumprido as condições iniciais e de contorno homogêneas, deveríamos ter $\sigma < 0$. Portanto, se fizermos $\sigma = -\lambda^2$, onde $\lambda > 0$, obtemos duas equações

$$r^2 R'' + rR' + \lambda^2 r^2 R = 0 \quad (7)$$

$$T'' + \lambda^2 a^2 T = 0 \quad (8)$$

Portanto

$$T(t) = k_1 \text{sen} \lambda at + k_2 \text{cos} \lambda at \quad (9)$$

Consideremos a nova variável independente da equação (8) como sendo $\xi = \lambda r$ e obtemos a equação de Bessel de ordem zero:

$$\xi^2 \frac{d^2 R}{d\xi^2} + \xi \frac{dR}{d\xi} + \xi^2 R = 0 \quad (10)$$

portanto

$$R = c_1 J_0(\xi) + c_2 Y_0(\xi) \quad (11)$$

onde J_0 e Y_0 são funções de primeira e de segunda espécie, respectivamente, de ordem zero. Em termos de r temos

$$R=c_1J_0(\lambda r)+c_2Y_0(\lambda r) \quad (12)$$

Olhando para a condição que foi imposta a $u(r,t)$ inicialmente sobre limitabilidade temos esta exige que R seja limitada quando $r \rightarrow 0$. Uma vez que $Y_0(\lambda r) \rightarrow -\infty$ quando $r \rightarrow 0$, devemos fazer $c_2 = 0$. A condição de contorno (4) exige que

$$J_0(\lambda)=0 \quad (13)$$

Logo temos que os valores admissíveis da constante de separação se obtêm mediante as raízes da equação transcendente (13). Como vimos na seção anterior, $J_0(\lambda)$ tem um conjunto infinito de zeros positivos, simbolizados por $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ ordenados em valor crescente. Além disso, as funções $J_0(\lambda_n r)$ são as autofunções do problema de Sturm-Liouville singular, e podem ser usadas como base para o desenvolvimento em série da função dada f . As soluções fundamentais deste problema, que satisfazem a equação diferencial parcial (3), as condições de contorno (4) e a condição de limitabilidade, são:

$$u_n(r,t)=J_0(\lambda_n r)sen\lambda_n at, n = 1,2,\dots \quad (14)$$

$$v_n(r,t)=J_0(\lambda_n r)cos\lambda_n at, n = 1,2,\dots \quad (15)$$

.....

$$\begin{aligned} u(r,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} [k_n u_n(r,t) + c_n v_n(r,t)] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [k_n J_0(\lambda_n r) sen \lambda_n at + c_n J_0(\lambda_n r) cos \lambda_n at] \end{aligned} \quad (16)$$

As condições iniciais exigem que

$$u(r,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(\lambda_n r) = f(r) \quad (17)$$

e

$$u_t(r,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a k_n J_0(\lambda_n r) = 0 \quad (18)$$

Pela seção anterior, temos que:

$$k_n=0, \quad c_n = \frac{\int_0^l r f(r) J_0(\lambda_n r) dr}{\int_0^l r [J_0(\lambda_n r)]^2 dr}; \quad n = 1, 2, \dots \quad (19)$$

Desta forma, podemos concluir que a solução da equação diferencial parcial (3) que obedece às condições de contorno (4) e as condições iniciais (5).

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(\lambda_n r) \cos \lambda_n a t \quad (20)$$

cujos coeficientes c_n são definidos pela equação (19).

CONCLUSÕES:

Por meio deste estudo foi possível perceber que os elementos que unem a matemática à música são muito abrangentes, apesar de dispersos. Eles variam desde elementos básicos como a noção de razão, passando por logaritmos entre outros até equações diferenciais parciais, as quais necessitam das chamadas séries de Fourier ou então problemas envolvendo funções de Bessel que recaem sobre os problemas de Sturm-Liouville.

Por meio de pesquisas em sítios da internet, visita ao IME, onde o Prof. Dr. Oscar João desenvolveu sua tese de doutorado nesta área e “montou” um laboratório sobre o tema, além das visitas feitas ao laboratório de física do CDCC. Apesar de conseguirmos várias idéias sobre os kits, a maioria deles necessitavam de equipamentos um pouco mais sofisticados e caros para uma escola estadual – a qual é nosso principal objetivo – com conjunto de diapasões, freqüencímetro e osciloscópio. Além disso, devemos ter a consciência de que nem sempre os instrumentos que nos parecem interessantes funcionam como deveriam funcionar, às vezes necessitam de alguns ajustes e/ou adaptações e à vezes nem isso pode salvar nosso experimento. Talvez fosse preciso de um pouco mais de conhecimentos físicos e/ou eletro/eletrônicos para desenvolver novos materiais. Com relação aos kits voltados ao ensino superior, optamos por não fabricá-los uma vez que as universidades são capazes de fornecer laboratórios específicos, com equipamentos modernos e sofisticados capazes de facilitar e motivar o estudo.

Com tudo, é possível concluir que o trabalho ocorreu de maneira muito satisfatória. Além disso, temos que apesar das várias relações mencionadas neste trabalho, ainda devem existir outros fatos interessantes e/ou novos, sob um ponto de vista ainda não explorado.

BIBLIOGRAFIA

Ciência e Natureza: A era do computador / Time Life / 66 – 67

Abdounur, Oscar João / Matmática e Música: O pensamento analógico na construção de significados / São Paulo, SP – Escrituras Editora e Distribuidora de Livros Ltda, 2002 / 334p.

Amery, Heather / Còmo hacer Juguetes que funcionan: Muchas máquinas y aparatos sencillos con movimiento / Madrid, España - Ediciones Plesa, 1976 / 47 p.

Arakawa , Hildetoshi /Afinação e temperamento: Teoria e Prática / Campinas, SP – ICEA Gráfica e Editora,1995 / 4 p.

Boyce, William E., DiPrima, Richard C. / Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno / Rio de Janeiro, RJ - LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.,1998 / 101p.

Cash, Terry , Taylor, Bárbara / Ciência Divertida:Som / São Paulo, SP - Editora Melhoramentos,1991 / 40 p.

Fernandez, M. / Making music whith mathematics / Mathematics Teacher / v. 92, p. 90-97, feb. 1999

Goldemberg, José / Curso de Física: Ondas, Som e Luz / São Paulo, SP – Editora Edgard Blücher Ltda.

Hank, S. Using the monochord: a classroom demonstration on the mathematics of musical scales / Mathematics Teacher / v.75, n.3, p. 238 – 244, mar. 1982.

Hofstadter, Douglas R. / Gödel, Escher e Bach: Um entrelaçamento de Gênios Brilhantes / Brasília, DF – Editora da Universidade de Brasília, 2000 / 866p.

Jeandot, Nicole / Explorando o Universo da Música / São Paulo, SP – Editora Scipione, 1997 / 174p.

Junior, F.; Medeiros, A.; Medeiros, C. / Matemática e Música: As Progressões Geométricas e o Padrão de Intervalos da escala Cromática / Bolema, ano 16, n. 20, 2003, p 101-126

Kastner, Berenice / Applications of secondary School Mathematics / library of Congress Cataloging in publication / Raton – Virginia, 1980 / 44 – 48

Malcom, P. / Mathematics of musical scales. / Mathematics Teacher / v. 65, n.7, p.611 – 615, nov 1972.

Oliveira, A.; Silva, A./ Curso Ilustrado de Matemática Moderna / ECL Lisa, 1973 / 7p.

Oxlade, Chris / Ciência e Mágica com Som: Divertidos Truques de Mágica com explicações Científicas / São Paulo, SP – Nobel, 1995 / 30 p.

Roederer, Juan G. / Introdução à física e psicofísica da música. / São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1998

Valadares, Eduardo de C. / Física mais que divertida: Inventos eletrizantes baseados em materiais reciclados e de baixo custo / Belo Horizonte, MG - Editora UFMG, 2000

INTERNET:

Prof.Luiz Da Silva Netto <http://member.tripod.com/caraipora/dimtrastes.htm>
Consultado em 19/07/2002

Prof.Luiz Da Silva Netto <http://member.tripod.com/caraipora/frelog.htm>
Consultado em 19/07/2002

Prof.Luiz Da Silva Netto <http://member.tripod.com/caraipora/intervalos.htm>

Consultado em 19/07/2002

Prof.Luiz Da Silva Netto <http://member.tripod.com/caraipora/cinson.htm>

Consultado em 30/07/2002

Prof.Luiz Da Silva Netto <http://member.tripod.com/caraipora/ouvindocores.htm>

Consultado em 30/07/2002

Prof. Luiz Ferraz Netto <http://feiradeciencias.com.br> Consultado em 11/06/2003

<http://www.icmc.sc.usp.br/ondulatória> Consultado em 10/10/2003

VÍDEOS:

A música das esferas

A matemática da música

Comentários de Matemática e Música – Mariza Cavalcanti

Som e Biologia

Som – Ensino Fundamental

Som – Prociencias

Som

Uma questão de escala

São Carlos, 21 de novembro de 2003

Prof. Dr. Pedro Luis A. Malagutti
Orientador

Juliana Pimentel Juliani
Aluna

Prof. Dr. Arthur Daresso Filho
Prof. Responsável